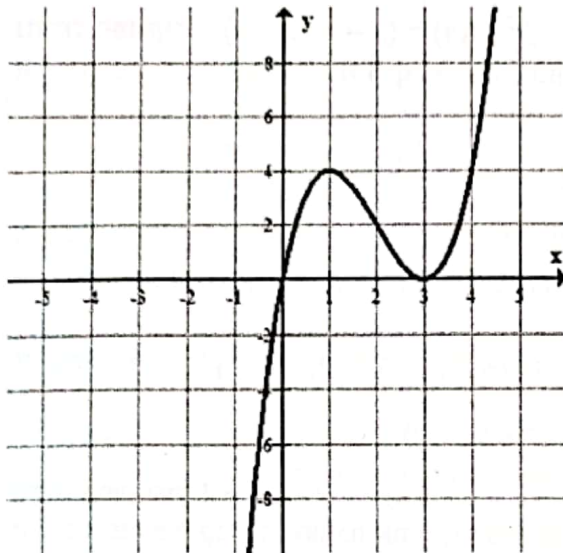


עבודת קיץ מצויינות ט מתמטיקה "בית החינוך המשותף חוף השרון"

עריכה : שירי גולן

שאלה 1 – ענו על סעיפים 1-6 :



נתון גרף הפונקציה $f(x)$.

1. השלימו: $f(x) = 4$ כאשר

$x =$ _____

2. רשמו את התחום בו $f(x) > 0$

3. רשמו את התחום שבו הפונקציה עולה וגם שלילית.

4. רשמו שני ערכים מתאימים ל- n

שעבורם למשוואה $f(x) = n$ יש 3 פתרונות.

5. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + 1$

רשמו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$. סמנו ליד כל נקודה אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום.

6. אחד מבין שני הייצוגים האלגבריים מתאים ל- $f(x)$. איזה מהם? נמקו.

$$y = -x(x-3)^2, y = x(x-3)^2$$

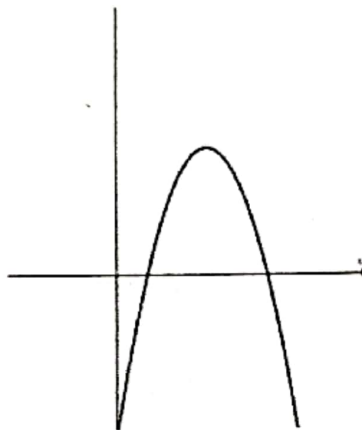
שאלה 2:

נתונה הפונקציה $f(x) = (x - 5)(3 - x)$
 א. מהו שיעור ה- x של נקודת הקדקוד של הפונקציה?

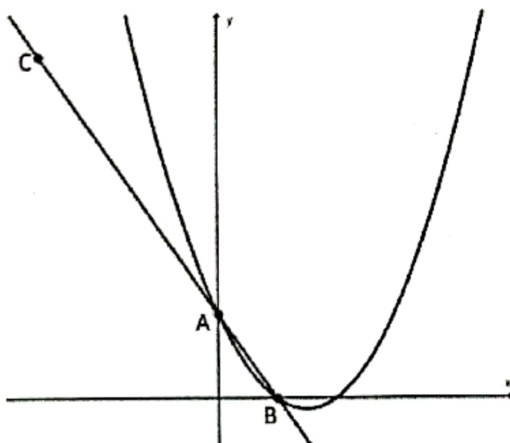
ב. מהו התחום בו הפונקציה עולה?

ג. כתבו פונקציה אחרת, $g(x)$, שנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x זהות לאילו של הפונקציה f ונקודת הקדקוד שלה היא נקודת מינימום.

ד. מה המרחק בין שתי נקודות הקדקוד של הפונקציות?



נתונה הפונקציה: $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$
 א. כתבו פונקציה קבועה שחותכת את גרף הפונקציה בשתי נקודות.
 ב. רשמו את שתי נקודות החיתוך של הפונקציה הריבועית והפונקציה הקבועה.
 ג. כתבו את התחום בו $f(x)$ גדולה מהפונקציה הקבועה.
 ד. כתבו משוואה לפונקציה קווית עולה העוברת דרך נקודת החיתוך של $f(x)$ עם ציר x ונקודת החיתוך של $f(x)$ עם הפונקציה הקבועה.



3. א. חשבו את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות:
 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ו- $g(x) = -2x + 2$

ב. קבעו באיזה תחום $f(x) > g(x)$

ג. נתון: הנקודה C נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ שיעור ה- x של הנקודה C הוא -3. חשבו את אורך הקטע BC

ד. כתבו משוואה של פונקציה קווית שאינה חותכת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$

טכניקה אלגברית

1. נמקו מדוע למשוואה שלפניכם אין פתרון.

$$\frac{x-2}{4x^2-9} + \frac{3x}{6-4x} = \frac{x}{6x+9}$$

2. נתונה המשוואה: $\frac{x^2+4x}{x^3-4x} + \frac{6}{x-2} = \frac{x+13}{x^2-x-6}$

א. הסבירו מדוע הפתרונות של המשוואה המקורית זהים לפתרונות של המשוואה

הבאה: $\frac{x+4}{(x-2)(x+2)} + \frac{6}{x-2} = \frac{x+13}{x^2-x-6}$

ב. פתרו את המשוואה.

3. נתונה המשוואה $9x^2 - 3x + a^2 = 0$ (a הוא פרמטר).
מה צריך להיות הערך של a כך שלמשוואה יהיה פתרון ממשי יחיד? נמקו.

4. נתון האי-שוויון $\frac{(2x-1)^2}{-4} < 9$

א. סמנו את האי-שוויון השקול לאי שוויון הנתון

i. $-\frac{(2x-1)^2}{4} > 9$ ii. $\frac{(2x-1)^2}{4} > -9$

iii. $\frac{-(2x-1)^2}{4} > 9$ iv. $\frac{(2x-1)^2}{4} > 9$

ב. פתרו את האי-שוויון.

5. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x^2 + 6x + 8 \end{cases}$$

הסבירו מדוע יש למערכת המשוואות רק פתרון יחיד.

6. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$$

עמית התחיל לפתור כך: $x^2 + 2xy + y^2 = 81$

$$(x + y)^2 = 81$$

המשיכו את דרך הפתרון של עמית, או בחרו בדרך אחרת לפתור.

$$11. \text{ פתרו את המשוואה: } x = \frac{1}{x^2 - 4} - 1 - \left(\frac{1}{x^2 - 4} - 1 \right) - 2$$

12. פתרו את המשוואות המעריכיות:

$$5^{(m^2 + 4m - 21)} = 1$$

$$2^{(m^2 - 3m - 12)} = \frac{1}{4}$$

$$2^m \cdot 3^m - 6 = 210$$

$$2^{m^2} \cdot 4^m = \frac{1}{2}$$

13. פתרו את המשוואות הריבועיות הבאות (עם פרמטר)

$$x^2 + ax + 7x + 7a = 0$$

$$2x(3x - a) - 9x = 2a(x - 3)$$

14. פתרו את המשוואות ואי השוויונים הבאים :

$$\frac{5}{x^4-1} + \frac{2}{x^2-1} = 1 \quad \text{א.}$$

$$\left(\frac{x-5}{2}\right)^2 < \frac{x-4}{8} \quad \text{ב.}$$

$$x-1 > 0 \quad \text{וגם} \quad x^2-81 > 0 \quad \text{ג.}$$

$$x-4 = \sqrt{x^2-36} \quad \text{ד.}$$

15. פתרו את המשוואות ואי השוויונים הבאים :

$$x(2x-a) - 2(2x-a) = a^2 - 2a \quad \text{1.}$$

$$(x^2 - 6x + 9)^2 - 10(x-3)^2 + 9 = 0 \quad \text{2.}$$

$$2\sqrt{4-x} - \sqrt{4x+9} = 1 \quad \text{3.}$$

$$2\sqrt{3x-2} + 4x = 6$$

א. פתרו את המשוואה:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

ב. פתרו את המשוואה:

$$\frac{3}{x^2 - 8x + 7} + \frac{4}{7 - x^2 + 6x} = \frac{x - 9}{x^2 - 1}$$

ג. פתרו את המשוואה:

בעיות מילוליות:

שטחו של משולש 20 סמ"ר. אם נגדיל צלע של המשולש ב- 25% ואת הגובה לצלע זו נאריך ב-2 ס"מ, יהיה שטח המשולש 35 סמ"ר.
א. מצאו את אורך הצלע ואת אורך הגובה אליה.
ב. נתון שבמשולש המקורי, הגובה לצלע חותך את הצלע ביחס של 2:3.
חשבו את היקף המשולש המקורי.

4) תלמידי הכיתה תכננו לצאת ביחד להצגה. עלות ההצגה והאוטובוס ביחד היא 2,880 ₪.

היות ו-4 תלמידים היו חולים נאלץ כל תלמיד לשלם 10 שקלים יותר. כמה תלמידים בכיתה?

1. פתור את המשוואה:

$$x(a+2) - 2(x-a)^2 = a$$

2. פתור את המשוואה:

$$11\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2 + 2x^2 + 6x$$

13) משני מקומות הרחוקים זה מזה 300 ק"מ יצאו רוכב אופנוע ורוכב אופניים זה לקראת זה.

רוכב האופניים רכב במהירות של 20 קמ"ש.

רוכב האופנוע רכב במהירות של 80 קמ"ש, הגיע ליעד ומיד חזר למקום המוצא.

רוכב האופנוע פגש את רוכב האופניים פעמיים. פעם אחת בדרכו הלוך ליעד ופעם שנייה בדרכו חזרה למקום המוצא.

א. כעבור כמה זמן פגש רוכב האופנוע את רוכב האופניים בדרכו הלוך (הדרך ליעד)?

ב. כעבור כמה זמן פגש רוכב האופנוע את רוכב האופניים בדרכו חזרה?

ג. איזה מרחק עבר רוכב האופניים עד שנפגשו בפעם השנייה?

14) יואב הולך לבית הספר מרחק של 1.2 ק"מ בדרך כלל במשך 15 דקות. פעם אחת אחרי שהלך במהירות הרגילה במשך זמן מה, התעכב למשך 4 דקות ואז הגדיל את מהירותו

ב-20 מטרים לדקה ובכל זאת איחר לבית הספר ב-3 דקות.

א. כמה דקות הלך יואב באותו היום עד שהתעכב?

ב. איזה מרחק עבר עד לעיכוב?

נתסמת הפונקציות $g(x) = 2x + 9$ ו- $f(x) = x^2 + 10x + 16$

הגרפים של הפונקציות משורטטים.

א. שרטטו משולש ABC וחשבו

את

שטחו.

ב. שרטטו משולש DEC וחשבו

את

שטחו.

ג. מצאו את משוואת הפונקציה

של

הקו הישר העובר דרך

הנקודות DB.

ד. מצאו את התחום המשותף בו

$f(x) < 0$ וגם $g(x) < 0$

תשובה: א) 8.75 יח"ר

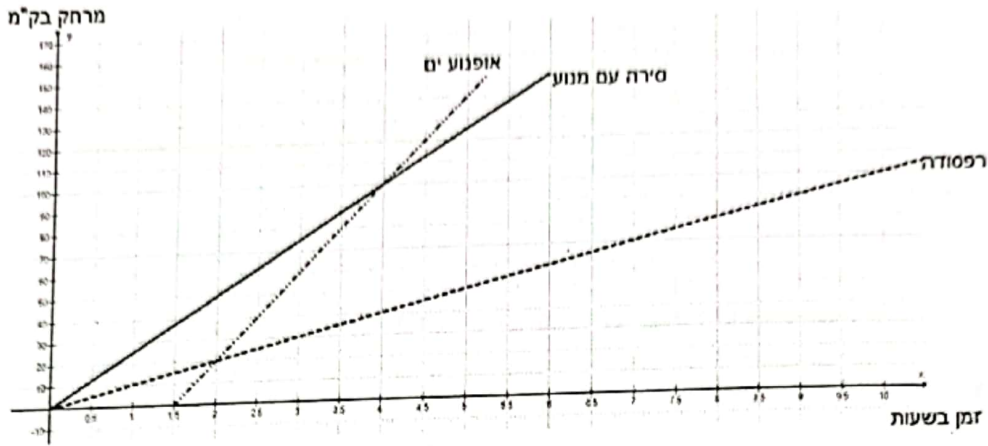
ב) 8.75 יח"ר

ג) $2+y=x$

ד) $-8 < x < -4.5$

אורייות

1. מאותו מקום על גדת הנהר יצאו רפסודה וסירה עם מנוע ליעד שמרחקו 150 ק"מ בשעה 8:00. הם שטו עם הזרם שמהירותו הקבועה הייתה 10 קמ"ש. בשעה 9:30 יצא אופנוע ים גם הוא מאותו המקום ולאיתו יעד. היעזרו בגרף המצורף כדי לענות על השאלות הבאות:



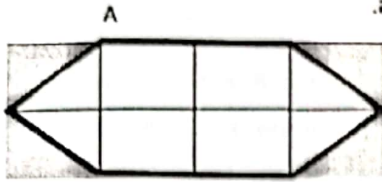
- ד. המהירות של הסירה עם המנוע (ללא מהירות הזרם) הייתה _____ קמ"ש.
ה. התייחסו לטענות הבאות:

טענה	נכון / לא נכון
i. ברגע שהאופנוע עקף את הרפסודה המרחק מהרפסודה לסירה היה 30 ק"מ	נכון / לא נכון
ii. שעה לאחר שעקף האופנוע את הסירה הגיע האופנוע ליעד	נכון / לא נכון
iii. חצי שעה לאחר שעקף האופנוע את הרפסודה מרחק האופנוע מהרפסודה היה גדול ממרחק האופנוע מהסירה	נכון / לא נכון

- ו. חשבו באיזו שעה תגיע הרפסודה אל היעד.

15) למשפחת ישראל חצר בצורת מלבן.

לקראת ריצוף החצר הם חילקו את השטח ל-8 מלבנים זהים. צלע אחת של כל מלבן מהמלבנים הקטנים ארוכה ב-1 מטר מהצלע השנייה. בתוך כל אחד מן המלבנים הפינתיים חסמו משולש ישר זווית, שניצביו מונחים על צלעות המלבן. שטח כל משולש ישר זווית שבפינה רוצף באבן אפורה, כמתואר בציור. את שטח החצר הנוותר ריצפו באבן לבנה.



א. איזה חלק משטח החצר רצפו באבן אפורה?

ב. השטח של החלק המרוצף באבן לבנה גדול ב-63 מ"ר מהשטח של החלק המרוצף באבן אפורה. מהן מידות החצר?

ג. סביב החלק המרוצף באבן לבנה יצרו שביל צר מאבנים קטנטנות (מסומן בקו עבה). מה אורכו של השביל? דייקו עד שתי ספרות אחרי הנקודה העشرונית.

ד. שתי נמלים יצאו מנקודה A לאותו כיוון ובאותה מהירות עד לנקודה A בחזרה. נמלה אחת הקיפה את החצר והנמלה השנייה הלכה על השביל שמקיף את החלק המרוצף באבן לבנה. הנמלה שהקיפה את החצר הגיעה לנקודה A שתי דקות אחרי הנמלה שהלכה על השביל. באיזו מהירות הלכו הנמלים? רשמו תשובתכם במטרים לדקה.

הסתברות :

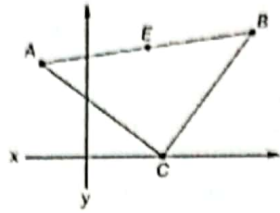
31) בכד 2 כדורים לבנים, כדור אחד צהוב והשאר כדורים אדומים. מוציאים מהכד עם החזרה שני כדורים.

מצא כמה כדורים אדומים בכד אם ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו הם בעלי אותו צבע היא $\frac{7}{18}$.

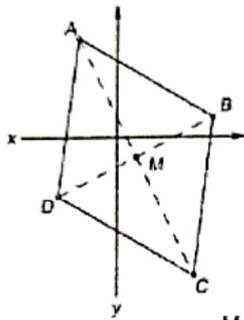
32) בכד 6 כדורים, חלקם לבנים וחלקם אדומים. מוציאים באקראי כדור מהכד. אם הוא אדום משאירים אותו בחוץ ואם הוא לבן מחזירים אותו לכד. לאחר מכן, בכל מקרה, מוציאים באקראי כדור נוסף.

מצא כמה כדורים לבנים וכמה כדורים אדומים בכד אם ההסתברות שהכדור השני הוא אדום היא $\frac{13}{35}$. (הדרכה: סמן ב-x את מספר הכדורים האדומים).

גאומטריה אנליטית :

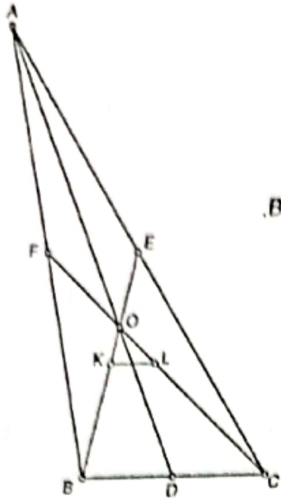


- 1.
- במשולש ABC שיעורי הקדקוד A הם $(-3, 6)$.
- הנקודה $E(4, 7)$ היא אמצע הצלע AB .
- א. מצא את שיעורי הקדקוד B .
- ב. מצא את שיעור x של הקדקוד C הם $(x, 0)$, אורך הצלע BC הוא 10.
- ג. הוכח כי הצלע AC מאונכת לצלע BC .

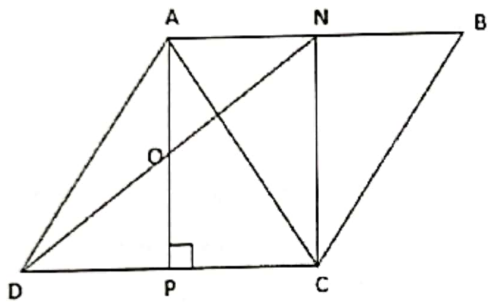


- 2.
- במעוין $ABCD$ נתונים הקדקודים $A(-2, 5)$ ו- $B(5, 1)$.
- אחד מאלכסוני המעוין מונח על הישר $y = -2x + 1$.
- א. איזה מבין האלכסונים AC או BD , מונח על הישר הנתון?
- ב. מצא את משוואת האלכסון השני של המעוין.
- ג. אלכסוני המעוין נפגשים בנקודה M . מצא את שיעורי הנקודה M .
- ד. מצא את שיעורי הנקודה D .
- ה. חשב את שטח המשולש AMB .

גאומטריה :



6. במשולש ABC התיכונים AD, BE, CF נפגשים בנקודה O.
 נקודה L היא אמצע התיכון CF, ו-K היא אמצע התיכון BE.
 א. נתון: $CF = 18\text{cm}$, $BE = 12\text{cm}$
 (1) חשב את אורכי הקטעים LO ו-KO.
 (2) חשב את היחס $\frac{LO}{CL}$.
 ב. נתון כי שטח המשולש BOD הוא 20cm^2 .
 מצא את שטח המשולש DOC.
 חת שטח המשולש KOL. נמק.



2 נתון:
 המרובע ABCD הוא מקבילית
 $(AB \parallel CD, AD \parallel BC)$
 הנקודה N היא אמצע AB
 $NC \parallel AP$
 $AP \perp DC$
 א. הוכיחו:
 $NC \perp AB$ (1)
 $CB = AC$ (2)
 $AO = OP$ (3)

ב. (1) איזה סוג מרובע הוא מרובע OPCN? הסבירו.

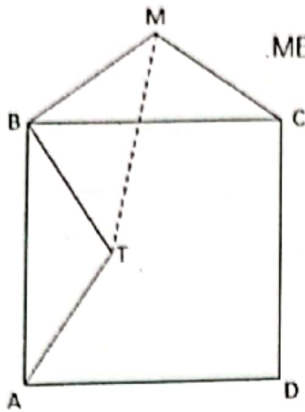
(2) נתון: $PC = 4\text{cm}$
 $OP = 3\text{cm}$

חשבו את שטח המרובע OPCN. נמקו את דרך החישוב.

ג. שטח משולש OPD הוא S.

(1) הביעו את שטח המשולש APD באמצעות S. נמקו.

(2) פי כמה גדול שטח המקבילית ABCD משטח המשולש APD?



1. מרובע ABCD הוא ריבוע.

על צלע הריבוע משורטט משולש שווה שוקיים MBC כך ש- $MB = MC$.

נקודה T בתוך הריבוע כך ש- $\triangle MBC \cong \triangle TBA$ בהתאמה

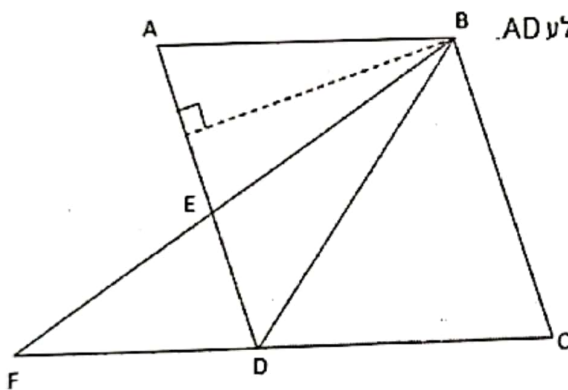
א. הוכיחו: $\angle MBT = 90^\circ$

ב. $\angle BMT = \angle BTM$

נתון גם: $BM = 4$ ס"מ, היקף משולש BMC הוא 15 ס"מ.

ג. חשבו את אורך הקטע MT

ד. חשבו את שטח הריבוע ABCD



2. במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.

המשך BE חותך את המשך DC בנקודה F.

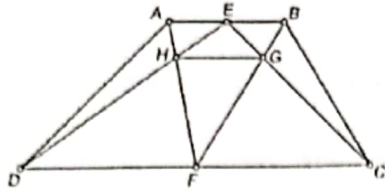
נתון כי שטח המשולש ABE הוא 48 סמ"ר.

שטח המשולש DFE הוא 27 סמ"ר.

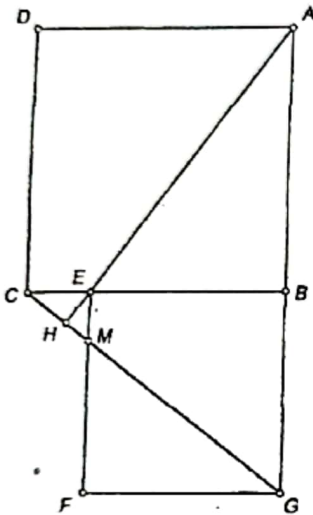
א. הוכיחו כי $\triangle DEF \sim \triangle AEB$

ב. מצאו את היחס: $\frac{AE}{DE}$

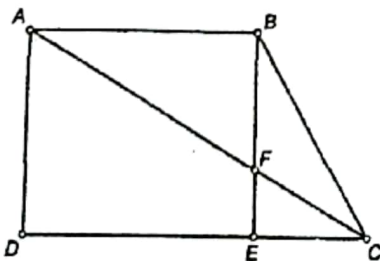
ג. חשבו את השטח של משולש BED



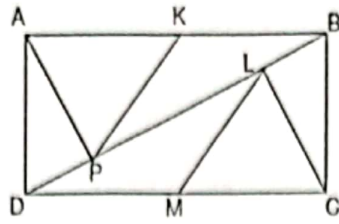
- 3.
- בטרפז ABCD הנקודות E ו-F הן אמצעי הבסיסים AB ו-DC בהתאמה. הקטעים BF ו-CE נחתכים בנקודה G, והקטעים AF ו-DE נחתכים בנקודה H. נתון: $AB = 8\text{cm}$, $DC = 21\text{cm}$.
- חשב את היחס $\frac{EG}{GC}$.
 - הוכח כי הקטע HG נקביל לבסיסי הטרפז.
 - חשב את אורך הקטע HG.



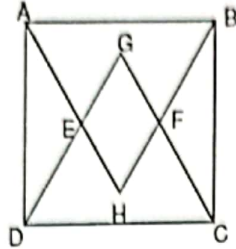
- 3.
- נתון הריבוע ABCD. על הצלע BC בנו ריבוע נוסף BEFG. הקטע CG חותך את הצלע EF בנקודה M. המשיך הקטע AE חותך את הקטע CG בנקודה H.
- הוכח כי: $\triangle ABE \cong \triangle CBG$.
 - (1) הוכח כי: $\triangle CHE \sim \triangle CBG$.
 - (2) נתון: $AB = 10\text{cm}$, $BG = 7.5\text{cm}$. חשב את אורך הצלע HE.



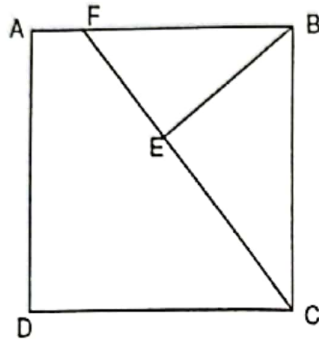
- 4.
- ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel DC$). BE הוא הגובה לצלע DC. האלכסון AC חוצה את הזווית BCD, וחותך את הגובה BE בנקודה F.
- נתון: $\frac{BC}{EC} = 2$, $S_{\triangle EFC} = 4\text{cm}^2$.
- חשב את שטח המשולש ABF.
 - (1) חשב את היחס $\frac{DC}{EC}$.
 - (2) חשב את שטח המלבן ABED.



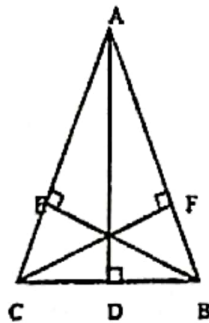
2. המרובע ABCD הוא מלבן.
 $AP \perp BD, CL \perp BD$
 הנקודה K אמצע הצלע AB, הנקודה M אמצע הצלע DC
 הוכיחו: מקבילית KLMN.



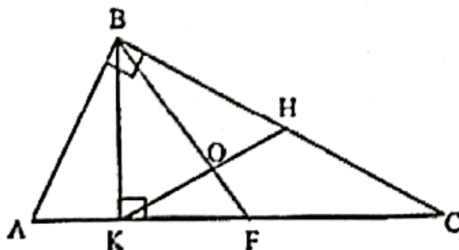
3. המרובע ABCD הוא ריבוע.
 המשולשים ABH ו-CDG הם משולשים שווים צלעות.
 הוכיחו:
 א. $GH \perp EF$
 ב. GH חוצה את EF.



4. המרובע ABCD ריבוע שאורך צלעו 12 ס"מ.
 הנקודה F מונחת על צלע AB כך ש $AF : FB = 1 : 3$.
 נתון: $EB \perp FC$.
 א. הוכיחו: $\triangle FBC \sim \triangle FEB$
 ב. חשבו את אורכי הקטעים EC, EF, FC.



5. נתון משולש $\triangle ABC$
 AD הוא גובה לצלע BC
 BE הוא גובה לצלע AC
 CF הוא גובה לצלע AB
 נתון: $CD = BD$
 א. הוכח כי המשולש $\triangle ABC$ שווה שוקיים.
 ב. הוכח כי המרובע BCEF הוא מרובע שווה שוקיים.



6. BK הוא הגובה ליתר AC
 ו- BF הוא היתר ליתר AC
 במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle ABC = 90^\circ$).
 הנקודה H היא אמצע BC
 ו- BF היתר ליתר AC, נקודת חיתוך הנקודה O.
 הוכח: $\angle BOK = 3 \angle ABK$

משוואות רציונאליות

פתרונות	
$x = -2$.15
$x = -2$.16
$x = -10$.17
$x = -5$.18
אין פתרונות	.19
$x \neq -1, x \neq 4$.20
$x_1 = 4, x_2 = -3$.21
אין פתרונות	.22
$x_1 = 4.5, x_2 = 1$.23
(2, 3)	.24
(1, 2)	.25
(5, -2)	.26
(12, 15)	.27
א. $x_1 = 9, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 6, x_2 = -14$.28

$$\frac{1}{x^2 - 3x} = \frac{-4}{x^2 + 2x - 15} - \frac{1}{2x + 10} \quad .15$$

$$\frac{x-1}{2x-3} - \frac{x}{x+1} = \frac{6x+1}{2x^2-x-3} \quad .16$$

$$\frac{9x}{8x^2-50} + \frac{5}{2x^2-5x} = \frac{1}{x} \quad .17$$

$$\frac{3}{2x+2} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{3x}{2(x-1)^2} \quad .18$$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x+3}{x^2-x-6} \quad .19$$

$$\frac{x-1}{x-4} - \frac{4x-1}{x^2-3x-4} = \frac{x}{x+1} \quad .20$$

$$\frac{x^2-25}{x+5} = x^2-17 \quad .21$$

$$\frac{x^3-3x^2}{x-3} = 6x-9 \quad .22$$

$$11\left(\frac{1}{2x+6} - \frac{2}{11}\right) = \frac{3}{9-x^2} - 1 \quad .23$$

$$\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+5y=21 \end{cases} \quad .24$$

$$\begin{cases} x+3(y+2)=14-x \\ 5(x-2)+2y=1-2x \end{cases} \quad .25$$

$$\begin{cases} \frac{7y-1}{3} + \frac{3x+5}{10} = -3 \\ x - \frac{2}{5}(5y-1) = \frac{4y}{5} + 11 \end{cases} \quad .26$$

$$\begin{cases} \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 1 \\ \frac{4}{x} + \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \quad .27$$



.28 פתור את המשוואות ללא פתרון סוגריים:

ב. $(x+4)^2 = 100$

א. $(x-2)^2 = 49$