

תלמידים יקרים,

" הפעילות הזוהי ביותר שכן אנו יכולים לעסוק בה היא למידה לצורך הבנה "

ברוך שפינוזה (1632-1677)

לפניכם עבודת תרגול לקיץ. נא שלבו בין המנוחה, הביטחון, היט והתרגול.
נא התחילו לפתור את העבודה כבר בתחילת החופשה ותכננו את זמנכם על מנת
שתסיקו לסיימה עד ה- 1.9, היום הראשון ללימודים.

נושאי העבודה: גיאומטריה, טריגונומטריה, חשבון דיפרנציאלי.

הגשת העבודה הינה חובה!!

הנחיות להגשת העבודה:

1. נא כתבו מסודר וברור, כתבו את הנושא ומספר השאלה, הניחו את השאלות לפי סדר הופעתן בעבודה.
2. הדפיסו את שני העמודים הראשונים של הטבלה, סמנו ב- "v" את השאלות שפתרתם ורישמו מה למדת מכל תרגיל. צרפו דפיט אלה לעבודה.
3. ציון העבודה יתווסף לציון הכיתה יא.
4. במהלך השבועיים הראשונים של תחילת השנה, יצרך מבחן על הנושאים המופיעים בטבלה.
5. נא הניחו את העבודה בשבוע השני של הלימודים. לא תתקבל עבודה מאוחר יותר!!

חופשה נעימה

אירנה, ענת ואביב

סיכום עבורה לחופשת הקיץ סוף כיתה י' - 5 יח' - תשפ"ו

ג'יאומטריה				
נושא	צמ'	תר'	פתרתי (v)	הצרות על התרגיל-מה לאמדת?
קטע אמצעים במשולש	2	1		
		2		
מפגש התיכונים	3	1		
		2		
		3		
שטחים	4	1		
		2		
משפט תאלס	6	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
משפט חוצה הזווית	8	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
דמיון משולשים	10	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
יחס הגבהים במשולשים דומים	14	1		
		2		
		3		
מעגל-ללא פרופורציה ודמיון	15	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
		9		
		10		
מעגל-עם פרופורציה ודמיון	18	1		
		2		
		3		
		4		

טריאנומטריה				
נושא	צמ'	תר'	פתרתי (אסמן v)	הצרות על התרגיל-מה לאמדת?
טריגונומטריה עם מצולעים	19	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
טריגונומטריה עם מעגל	21א	1		
		2		
		3		
		4		
חשבון דיפרנציאלי				
פונקציה מורכבת	24	1		
		2		
		3		
		4		
פונקצית מנה	30	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
		9		
		10		
בעיות קיצון גיאומטריות	37	1		
		2		
בעיות קיצון גרפיות		3		
		4		
		5		
שאלות קצרות				
אנליזה	39	1		
		2		
		3		
		4		
גיאומטריה		1		
		2		
		3		
טריגונומטריה		1		

חוברת תרגול לעבודת הקיץ לתלמידים העולים לכיתה י"א - ברמת 5 יחידות לימוד

מצורפת חוברת תרגול לעבודת הקיץ עבור תלמידות י"א המיועדים/ות ללמוד בכיתה י"א ברמת 5 יח' (571).

לאחר שיח מקיף ומעמיק עם צוותי הוראה, העבודה נכתבה לפי הקווים המנחים הבאים:

1. נושאים מרכזיים של כיתה י'.
2. תרגול תכליתי ולא מעמיק מדי.

תוכן העניינים

2	קטע אמצעים במשולש ובטרפז
3	מפגש התיכונים במשולש
4	שטחים
6	משפט תאלס
8	משפט חוצה הזווית במשולש
10	דמיון משולשים
13	יחס הגבהים במשולשים דומים
14	יחס השטחים במשולשים דומים
15	מעגל ללא פרופורציה ודמיון
18	מעגל עם פרופורציה ודמיון
19	טריגונומטריה - משפט הסינוסים והקוסינוסים
21-22	טריגונומטריה במעגל
22	פונקציית פולינום
24	פונקציה מורכבת
30	פונקציית מנה
37	בעיות קיצון

השאלות בעבודה לקוחות מספר התרגול של ארכימדס

בשאלון 571 לכיתה י'.

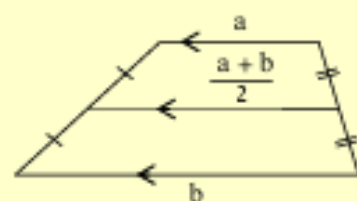


קטע אמצעים במשולש ובטרפז

קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר בין אמצעי שתי צלעות במשולש.

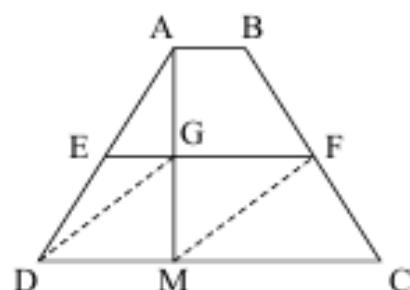


- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- קטע החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית.
- קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.



קטע האמצעים בטרפז מחבר את אמצעי שתי שוקי הטרפז.

- קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
- בטרפז, קטע החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה.



1. הנקודות E ו-F נמצאות על שוקי הטרפז ABCD כמתואר בשרטוט.

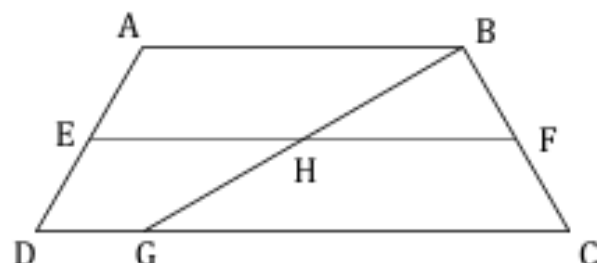
הקטע EF חותך את גובה הטרפז AM בנקודה G. נתון: $BF = CF$.

המרובע DMFG הוא מקבילית.

א. הוכיחו: $AE = DE$.

ב. נתון: המרובע ABGE הוא מקבילית.

הוכיחו: $CM = 3EG$.



2. הקטע EF הוא קטע האמצעים בטרפז שווה השוקיים

ABCD. הנקודה G נמצאת על הבסיס CD.

הקטע BG חוצה את הקטע EF בנקודה H.

נתון: $\angle BCD = 60^\circ$, $BG \perp BC$.

א. נסמן: $CF = a$.

הביעו באמצעות a את אורך EH.

ב. נתון: היקף הטרפז ABFE הוא 18 ס"מ. חשבו את היקף הטרפז CDEF.

(הדרכה: העבירו את הקטע EG).

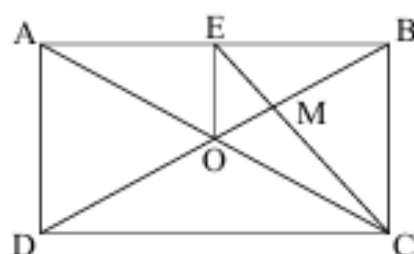
תשובות: 2. א. $2a$. ב. 22 ס"מ.

מפגש התיכונים במשולש



שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת הנקראת
 "מפגש התיכונים במשולש" וגם "מרכז הכובד של המשולש".

נקודת מפגש זו מחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק
 הקרוב לקודקוד ארוך פי שניים מהחלק הרחוק מהקודקוד.



1. אלכסוני המלבן ABCD נחתכים בנקודה O.

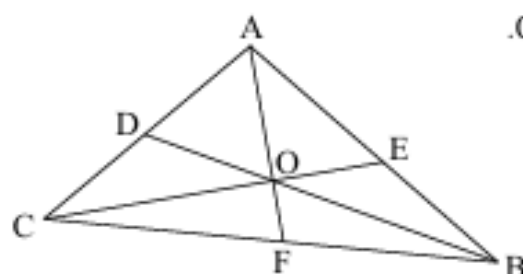
הקטע EO הוא גובה במשולש $\triangle ABO$.

הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה M.

א. הוכיחו: $CM = 2EM$.

ב. נתון: $BC = 18$ ס"מ. שטח המשולש $\triangle ABO$ הוא 108 סמ"ר.

חשבו את אורך הקטע MO.

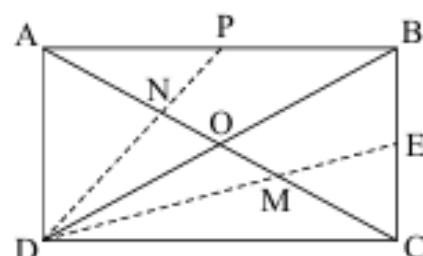


2. במשולש $\triangle ABC$ התיכונים AF, BD ו-CE נחתכים בנקודה O.

המשולש $\triangle ADO$ הוא שווה צלעות. הוכיחו:

א. התיכונים AF ו-CE מאונכים זה לזה.

ב. $BO = 4OF$.



3. (*) במלבן ABCD הנקודות E ו-P הן אמצעי הצלעות BC ו-AB בהתאמה. הקטעים DP ו-DE חותכים את האלכסון AC בנקודות N ו-M בהתאמה.

א. הוכיחו: $AN = MN = MC$.

ב. נתון: $MN = 20$ ס"מ. חשבו את אורך הקטע PE.

ג. נתון: $CE = 18$ ס"מ. חשבו את היקף המלבן.

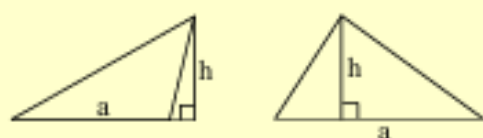
תשובות: 1) ב. 5 ס"מ. 3) ב. 30 ס"מ. ג. 168 ס"מ.

שטחים

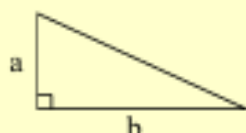
משולשים

שטח משולש שווה למחצית מכפלת הגובה באורך הצלע

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{שאלית הוא יורד}$$

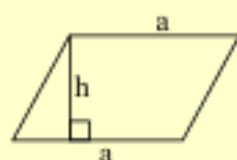


שטח משולש ישר זווית שווה למחצית מכפלת אורכי ניצביו: $S = \frac{a \cdot b}{2}$

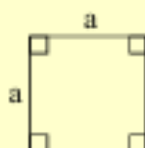


מרובעים

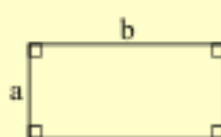
שטח מקבילית שווה למכפלת צלעה בגובה היורד אליה מהקודקוד שמולה: $S = a \cdot h$



שטח ריבוע שווה לריבוע צלעו: $S = a^2$

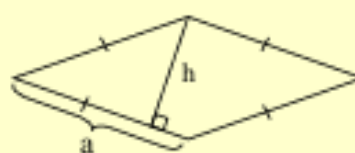


שטח מלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו: $S = a \cdot b$

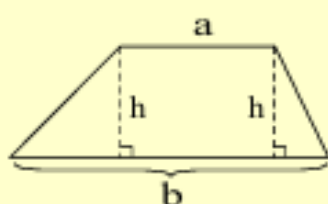
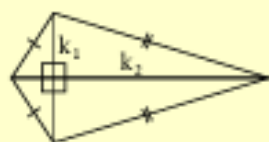


שטח מעוין ניתן לחישוב בשתי דרכים:

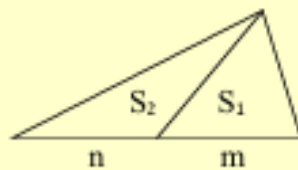
על ידי מכפלת הצלע בגובה היורד אליה: $S = a \cdot h$ או כמחצית מכפלת אורכי האלכסונים: $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$



שטח דלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים: $S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$



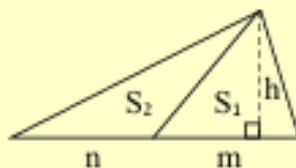
שטח טרפז שווה למחצית מכפלת הגובה בסכום הבסיסים: $S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$

משפט עזר בשטחים

קטע המחבר בין קודקוד המשולש לבין הצלע שמולו, מחלק את המשולש לשני משולשים שהיחס בין שטחיהם הוא כיחס החלוקה של הצלע המחולקת.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n} \quad \text{בשרטוט:}$$

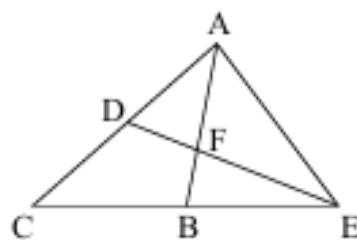
שימו לב! זהו משפט עזר אך הוא אינו כלול ברשימת המשפטים המאושרים על ידי משרד החינוך ולכן לא ניתן להציגו במסגרת הוכחה בלימודים בחטיבה ובתיכון. יש להוכיח אותו בכל פעם שמתמשים בו. עם זאת, הוא חשוב מאוד ושאלות רבות נפתרות באמצעותו.



כדי להוכיח את משפט העזר נוריד גובה משותף h לשני המשולשים (במקווקו). עבור המשולש הימני זהו גובה פנימי, ועבור המשולש השמאלי הוא גובה חיצוני.

$$S_1 = \frac{m \cdot h}{2} \quad \text{ושטח המשולש השמאלי: } S_2 = \frac{n \cdot h}{2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{m \cdot h}{2}}{\frac{n \cdot h}{2}} = \frac{m}{n} \quad \text{נחלק את שני השטחים זה בזה ונמצא את היחס ביניהם:}$$



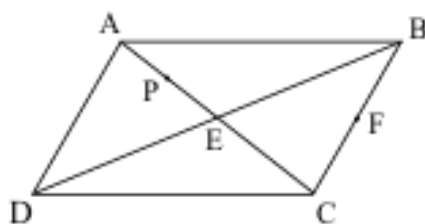
1. במשולש $\triangle ACE$ התיכונים AB ו-DE נחתכים בנקודה F.

נתון: שטח המשולש $\triangle BEF$ הוא 12 סמ"ר. חשבו את שטח:

א. המשולש $\triangle AFE$.

ב. המשולש $\triangle ADF$.

ג. המרובע CDFB.



2. (*) במקבילית ABCD, הנקודות P ו-F הן אמצעי הקטעים

$$S_{ACDE} = 4k \quad \text{נסמן:}$$

א. הביעו באמצעות k את שטחי המשולשים:

1. $\triangle BCE$ 2. $\triangle CDF$ 3. $\triangle CDP$

ב. נתון ששטח המשולש $\triangle ABP$ קטן בששה סמ"ר משטח

המשולש $\triangle BCE$. חשבו את שטח המקבילית ABCD.

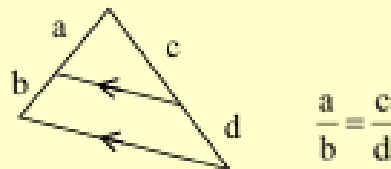
תשובות: (1) א. 24 סמ"ר. ב. 12 סמ"ר. ג. 24 סמ"ר. (2) א. 1. 4k. 2. 4k. 3. 6k. ב. 48 סמ"ר.

משפט תאלס

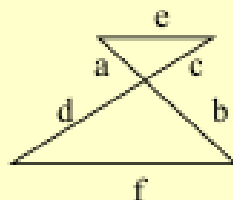


תאלס איש מילטוס (546-624 לפנה"ס בקירוב) היה פילוסוף, מתמטיקאי, ואחד משבעת חכמי יוון העתיקה. הישגו המדעי המוכר הוא הוכחת **משפט תאלס**.

משפט תאלס: שני קטעים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

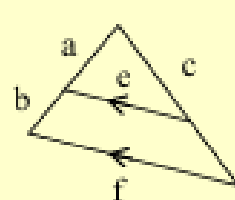


משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכייהן בקטעים פרופורציוניים. ההרחבה מתייחסת לשני מקרים:



הרחבה ב':

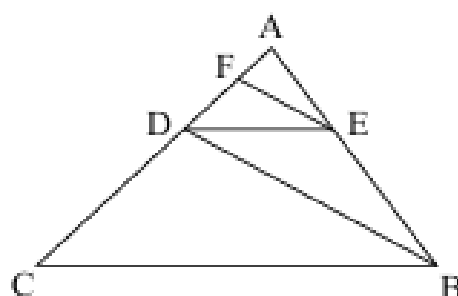
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$



הרחבה א':

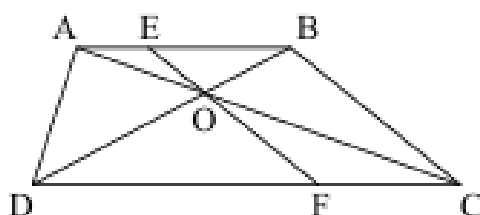
$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$$

משפט תאלס (הפוך): שני קטעים המקצים על שוקי זווית 4 קטעים פרופורציוניים הם מקבילים. "כאשר מתקיימים היחסים המופיעים בהרחבה א', אין הכרח שהקטעים e ו-f מקבילים.



1. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כך ש: $DE \parallel BC$, $EF \parallel BD$, $AC = 12.5$ ס"מ, $AB = 10$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ. חשבו את:

- א. אורכי הקטעים AF ו-DF.
ב. היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}$.

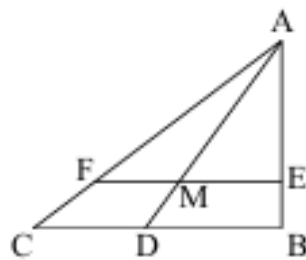


2. הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הבסיסים AB ו-CD בטרפז ABCD. הקטע EF עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים O ומקביל לשוק BC.

א. הוכיחו: $\frac{AE}{EO} = \frac{AB}{BC}$.

- ב. נתון: $AE = 3$ ס"מ, $BE = 2EO$.

חשבו את אורכי BC ו-EO.



3. המשכי שוקי הטרפז BCFE נחתכים בנקודה A. הנקודה D נמצאת

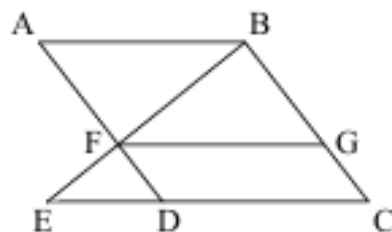
על הצלע BC כך שהקטעים AD ו-EF נחתכים בנקודה M.

א. הוכיחו: $\frac{EM}{BD} = \frac{MF}{CD}$

ב. נתון: 16 ס"מ BC , 6.75 ס"מ EM , $AE = 3BE$.

חשבו את אורכי הקטעים CD ו-MF.

ג. נתון: 12 ס"מ AB , $AE \perp EF$. חשבו את היקף המשולש $\triangle AFM$.



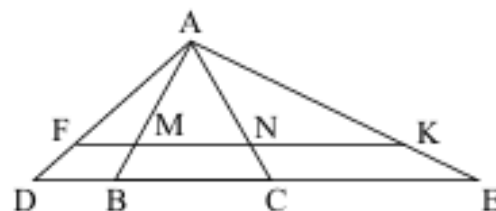
4. הנקודות F ו-G נמצאות על צלעות המעין ABCD.

המשכי הקטעים BF ו-CD נחתכים בנקודה E. נתון: $\frac{BG}{CG} = \frac{AB}{DE}$.

א. הוכיחו: $FG \parallel CE$.

ב. הוכיחו: $\frac{BG}{CG} = \frac{CD}{DE}$

ג. נתון: 64 ס"מ CE , 15 ס"מ DF ($DE < CD$). חשבו את אורך הקטע GF.



5. הנקודות B, C, F ו-K נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ADE$

כמתואר בשרטוט. הקטעים AB ו-AC חותכים את הקטע FK

בנקודות M ו-N בהתאמה. המשולש $\triangle ABC$ שווה צלעות

והיקפו 18 ס"מ. נתון: $KF \parallel DE$, 17 ס"מ DE ,

6 ס"מ AF , 2 ס"מ DF , 3 ס"מ BD . חשבו את:

א. היקף המשולש $\triangle AFN$.

ב. היחס בין שטחי הטרפזים: $\frac{S_{BDFM}}{S_{CEKN}}$

תשובות:

1. א. 2 ס"מ AF , 3 ס"מ DF . ב. $\frac{2}{3}$.

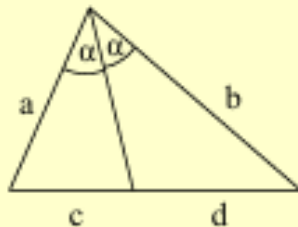
2. ב. 3 ס"מ.

3. ב. 7 ס"מ CD , 5.25 ס"מ MF . ג. 31.5 ס"מ.

4. ג. 40 ס"מ.

5. א. 17.25 ס"מ. ב. $\frac{3}{8}$.

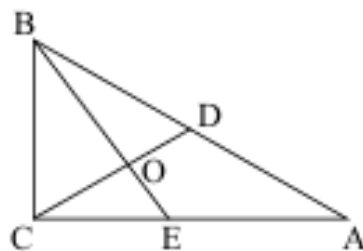
משפט חוצה הזווית במשולש



משפט חוצה הזווית (הפנימית): חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{בשרטוט:}$$

משפט הפוך: ישר העובר דרך קודקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה פנימית ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר.



1. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$),

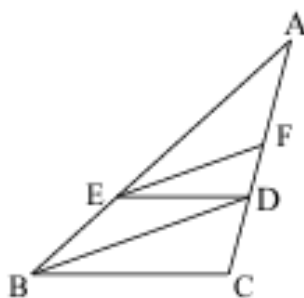
חוצה הזווית BE והתיכון CD נחתכים בנקודה O.

נתון: $BC = 66$ ס"מ, $AB = 110$ ס"מ. חשבו את:

א. אורך התיכון CD.

ב. אורכי הקטעים AE ו-CE.

ג. אורך הקטע DO.



2. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$

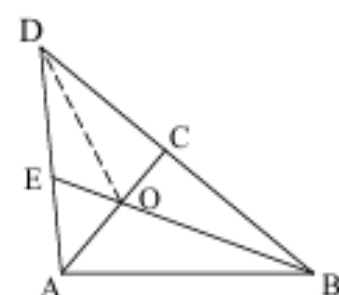
כך ש: $DE \parallel BC$. הקטעים BD ו-EF חוצים את הזווית $\angle ABC$

ו- $\angle AED$ בהתאמה.

א. הוכיחו: $\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC}$.

ב. נתון: $AB = 18a$, $BC = 9a$. הביעו באמצעות a את אורך הקטע DE.

ג. נתון: $AC = 15a$. הביעו באמצעות a את אורך AF.



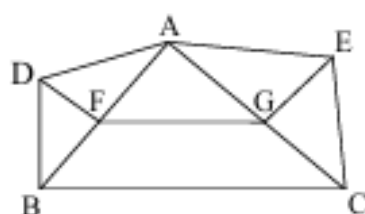
3. (*) במשולש $\triangle ABD$, הגובה AC וחוצה הזווית BE נחתכים בנקודה O.

נתון: $\angle D = 45^\circ$, $AC = 18$ ס"מ, $BC = 24$ ס"מ. חשבו את:

א. אורך הקטע CO.

ב. שטח המשולש $\triangle BDO$.

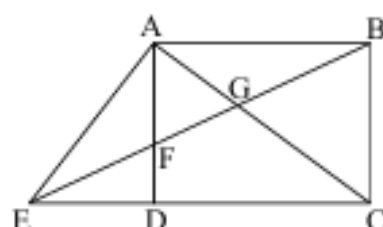
ג. היחס: $\frac{AE}{AD}$.



4. הנקודות D ו-E נמצאות מחוץ למשולש $\triangle ABC$.
 הנקודות F ו-G נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כך
 שהקטעים DF ו-EG חוצים בהתאמה את הזוויות $\angle ADB$

ו- $\triangle AEC$. נתון: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$.

- א. הוכיחו: המרובע BCGF הוא טרפז.
 ב. נתון: $AG = 3$ ס"מ, $CG = 2$ ס"מ, $BC = 7.5$ ס"מ. חשבו את אורך הקטע FG.
 ג. (*) קבעו אם ייתכן ש: $DF \perp AB$. נמקו.

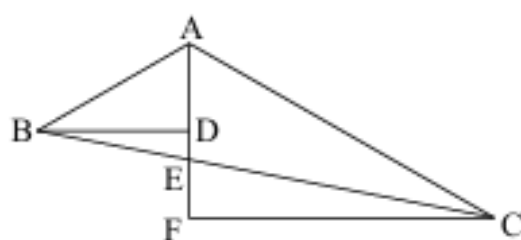


5. (*) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על המשך הצלע CD
 כך שהקטע BE חוצה את הזווית $\angle AEC$ וחותך את הקטעים
 AC ו-AD בנקודות G ו-F בהתאמה.

א. הוכיחו: $\frac{AE}{CE} = \frac{AF}{BC}$.

- ב. נתון: $AB = 10$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ.
 חשבו את אורך הקטע AF.

ג. חשבו את היחס: $\frac{CG}{AG}$.



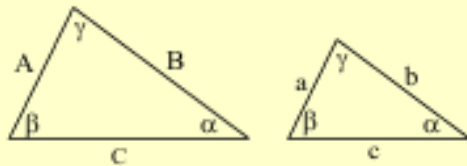
6. הנקודה E נמצאת על הצלע BC במשולש $\triangle ABC$.
 מהנקודות B ו-C מורידים אנכים לקטע AE ולהמשכו
 כך שמתקיים: $BD \perp AF$, $CF \perp AF$.
 נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ, $DF = 3$ ס"מ,
 $AC = 10$ ס"מ.

- א. הוכיחו: הקטע AE חוצה את הזווית $\angle BAC$.
 ב. נסמן: $BC = 18$ מ. הביעו באמצעות m את אורך BE.

תשובות:

- (1) א. 55 ס"מ. ב. 33 ס"מ, $CE = 55$ ס"מ, $AE = 25$ ס"מ. (2) ב. 6a. ג. $\frac{2}{3}a$.
 (3) א. 8 ס"מ. ב. 168 סמ"ר. ג. $\frac{5}{12}$. (4) ב. 4.5 ס"מ. ג. לא. (5) ב. 5 ס"מ. ג. $\frac{8}{5}$. (6) ב. 6m.

דמיון משולשים

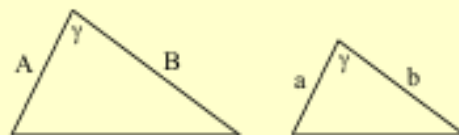


משולשים דומים הם משולשים שבהם לכל זווית במשולש אחד יש זווית ששווה לה במשולש האחר, וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות (צלעות מתאימות נמצאות מול זוויות שוות).

יחס זה נקרא יחס הדמיון. המשולשים בשרטוט הם דומים ומתקיים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$.

משפט דמיון ז.ז.ז:

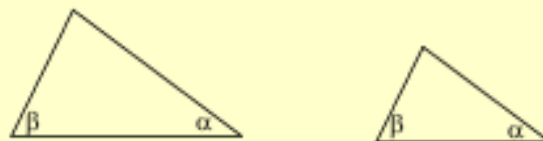
שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין שני זוגות צלעות מתאימות והזווית שביניהן שווה - הם משולשים דומים.



לפי השרטוט, אם קיימת זווית משותפת γ ומתקיים

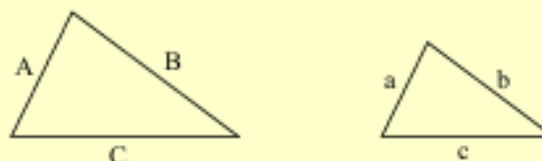
שוויון היחסים $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ אז המשולשים דומים.

משפט דמיון ז.ז.ז: שני משולשים בהם שוות בהתאמה שתי זוויות הם דומים.



בהתאם לשרטוט, אם בשני משולשים יש שתי זוויות שוות, אז המשולשים דומים.

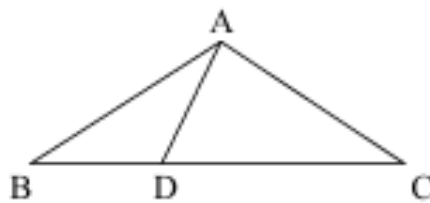
משפט דמיון צ.צ.צ: שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות הם דומים.



כלומר, בהתאם לשרטוט, אם מתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$ בין שני משולשים,

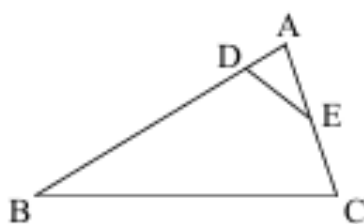
אז הם דומים ולכן גם זוויותיהם שוות בהתאמה.

1. הנקודה D נמצאת על הבסיס BC במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$



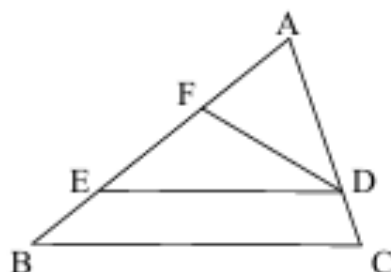
- שטחו 768 סמ"ר. נתון: $BC = 64$ ס"מ.
- א. חשבו את היקף המשולש $\triangle ABC$.
- ב. נתון: $CD = 39$ ס"מ. הוכיחו: $\triangle ABD \sim \triangle BCA$.
- ג. חשבו את היקף המשולש $\triangle ACD$.
- ד. קבע איזו מהזוויות $\angle ADC$ או $\angle CAD$ גדולה יותר. נמקו.

2. הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$. הנקודה E היא



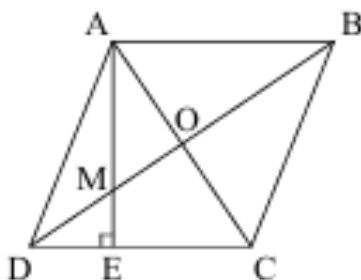
- אמצע הצלע AC. נתון: $AE = 2AD$, $BD = 7AD$. היקף המשולש $\triangle AED$ הוא 9 ס"מ והיקף המרובע BCED הוא 33 ס"מ.
- א. חשבו את היקף המשולש $\triangle ABC$.
- ב. נסמן את השטח: $S_{\triangle ADE} = k$. העבירו את הקטע CD, היעזרו במשפט העזר בשטחים והביעו באמצעות k את שטח המשולש $\triangle ABC$.

3. המשכי שוקי הטרפז BCDE נחתכים בנקודה A.

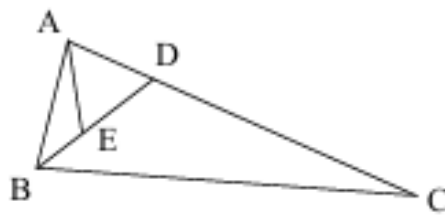


- הנקודה F נמצאת על הקטע AE. נתון: $\angle ADF = \angle ABC$.
- 4 ס"מ $AC =$, 3 ס"מ $AD =$, 6 ס"מ $AB =$.
- א. חשבו את אורכי הקטעים AF ו-EF.
- ב. נתון: הקטע DE ארוך ב-1.5 ס"מ מהקטע DF. חשבו את אורך הקטע BC.

4. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה O.



- הגובה AE חותך את האלכסון BD בנקודה M.
- א. הוכיחו: $\triangle ABO \sim \triangle MAO$.
- ב. נתון שהיקף המעוין ABCD הוא 80 ס"מ, $AC = 24$ ס"מ. חשבו את אורך הקטע MO.
- ג. הוכיחו: $\triangle MAO \sim \triangle MDE$.
- ד. חשבו את אורך הקטע DE.



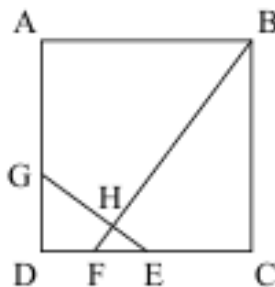
5. (*) הקטע BD הוא חוצה הזווית $\angle ABC$ במשולש $\triangle ABC$. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלע AC ועל חוצה הזווית BD כך שהמשולש $\triangle ADE$ הוא שווה צלעות.

א. הוכיחו: $\frac{DE}{CD} = \frac{AB}{BC}$.

- ב. נתון: $AE = k$, $CD = 3k$. הביעו באמצעות k את אורך BE.

- ג. נתון: שטח המשולש $\triangle ABC$ הוא 72 סמ"ר.

חשבו את שטח המשולש $\triangle ABE$.



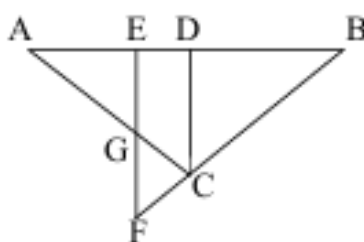
6. נתון הריבוע ABCD ששטחו 1,600 סמ"ר. הנקודה E היא אמצע הצלע CD והנקודה F היא אמצע הקטע DE. הנקודה G נמצאת על AD כך שהקטעים BF ו-GE נחתכים בנקודה H. נתון: $AG = 25$ סמ"מ.

- א. הוכיחו: $\triangle DGE \sim \triangle CFB$.

- ב. הוכיחו: $\angle EHF = 90^\circ$.

- ג. חשבו את אורכי הקטעים HE ו-HF.

- ד. חשבו את שטח המרובע ABHG.



7. הנקודות D, E ו-G נמצאות על צלעות המשולש $\triangle ABC$ כמתואר בשרטוט. המשכי הקטעים EG ו-BC נחתכים בנקודה F. הנקודות D ו-G הן בהתאמה אמצעי הקטעים EF ו-AB. נתון: $AB = 24$ סמ"מ, $DE = 4$ סמ"מ, $BF = 20$ סמ"מ, $AG = 10$ סמ"מ.

- א. הוכיחו: $\triangle AEG \sim \triangle BEF$.

- ב. היעזרו בסעיף א' והסבירו מדוע מתקיים: $\angle AEG = 90^\circ$.

- ג. חשבו את אורך הקטע EF.

- ד. קבעו איזה סוג של מרובע הוא DEFC וחשבו את היקפו.

תשובות:

1. א. 144 סמ"מ. ג. 104 סמ"מ. ד. $\angle ADC$. 2. א. 36 סמ"מ. ב. $16k$.

3. א. 2 סמ"מ, $AF = 2.5$ סמ"מ. ב. 6 סמ"מ. 4. ב. 9 סמ"מ. ד. 5.6 סמ"מ.

5. ב. 0.5k. ג. 6 סמ"ר. 6. ג. 8 סמ"מ, $HE = 6$ סמ"מ, $HF = 874$ סמ"ר. ד. 874 סמ"ר.

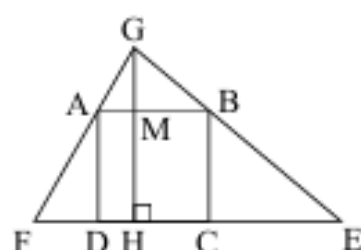
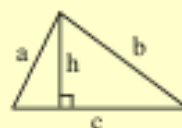
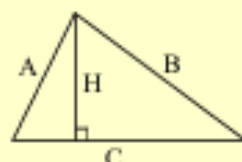
7. ג. 12 סמ"מ. ד. טרפז ישר זווית שהיקפו 30 סמ"מ.



יחס הגבהים במשולשים דומים

משפט: במשולשים דומים יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

בהתאם לשרטוט, אם המשולשים דומים אז מתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{H}{h}$.



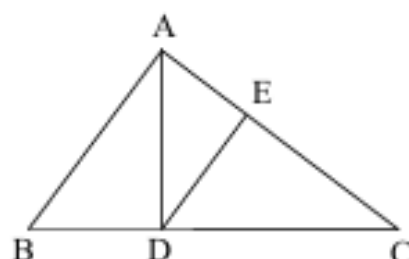
1. במשולש $\triangle EFG$ חסום הריבוע $ABCD$ כמתואר בשרטוט.

הגובה GH חותך את הצלע AB בנקודה M .

נתון: $CE = 6$ ס"מ, $DF = 2$ ס"מ, $MG = 2$ ס"מ. חשבו את:

א. שטח הריבוע $ABCD$.

ב. שטח המשולש $\triangle CEM$.



2. הקטעים AD ו- DE הם הגבהים ליתר במשולשים ישרי הזווית

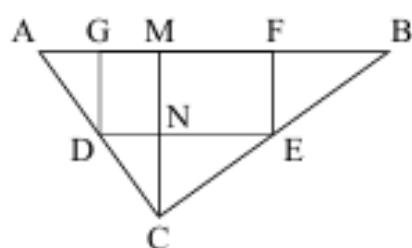
$\triangle ABC$ ו- $\triangle CAD$ בהתאמה.

א. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

ב. הוכיחו: $AD \cdot AC = BC \cdot DE$.

ג. נתון שהצלע BC ארוכה ב-25 ס"מ מהצלע AC .

הגובה AD ארוך ב-25% מהגובה DE . חשבו את אורך AB .



3. (*) במשולש $\triangle ABC$ חסום המלבן $DEFG$ כמתואר בשרטוט.

הגובה CM חותך את הקטע DE בנקודה N .

נתון: $GF = 3EF$, $AB = 3$ ס"מ, $CM = a$ נסמן: $CM = a$.

א. הביעו באמצעות a את אורך הקטע EF .

ב. נתון: היקף המלבן $GFED$ הוא ארבעה ס"מ. מצאו את a .

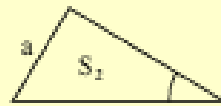
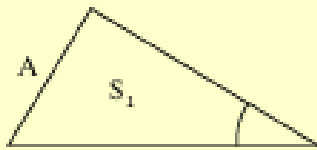
ג. הוכיחו: $BE = CE$.

תשובות:

1) א. 16 סמ"ר. ב. 12 סמ"ר. ג. 75 ס"מ. 2) א. $\frac{a}{a+1}$. ב. $a = 1$.

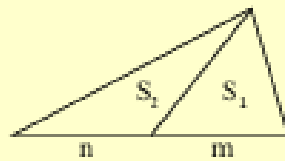
יחס השטחים במשולשים דומים

במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:



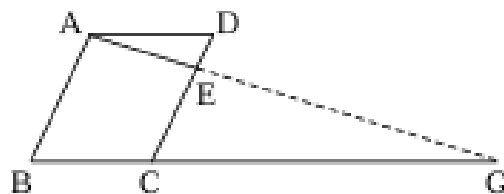
$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{A}{a}\right)^2$$

תזכורת! משפט עזר בשטחים: ישר המחבר בין קודקוד המשולש לבין הצלע שמולו, מחלק את המשולש לשני משולשים שהיחס בין שטחיהם הוא כיחס החלוקה של הצלע המחולקת.



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n} \quad \text{בשרטוט מתקיים:}$$

שימו לב! יש להוכיח את המשפט בכל פעם שנשתמש בו על ידי הורדת גובה משותף בשני המשולשים.



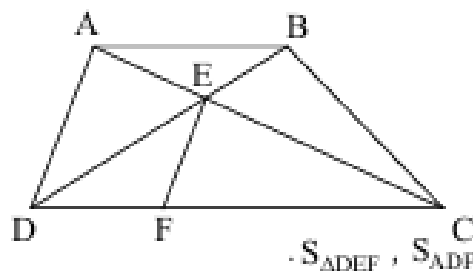
1. הנקודה E נמצאת על הצלע CD במקבילית ABCD.

המשכי הקטעים AE ו-BC נחתכים בנקודה G.

שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא 1 סמ"ר. נתון: $CD = 4DE$.

א. הוכיחו: $\triangle ADE \sim \triangle GCE$.

ב. חשבו את שטח: 1. המשולש $\triangle CGE$. 2. המקבילית ABCD.

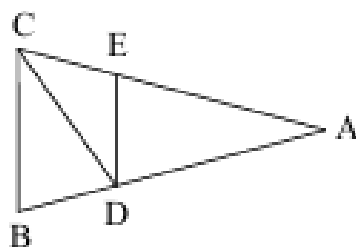


2. אלכסוני הטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) נחתכים בנקודה E.

הנקודה F נמצאת על CD. נתון: $CD = 2AB$, $EF \parallel AD$.

א. חשבו את היחס: $\frac{EF}{AD}$.

ב. נתון השטח: $S_{\triangle ABE} = 12s$. הביעו באמצעות s את השטחים: $S_{\triangle ADFE}$, $S_{\triangle DEF}$.



3. (*) המשכי שוקי הטרפז BCED נחתכים בנקודה A.

שטח הטרפז BCED גדול פי 1.25 משטח המשולש $\triangle ADE$.

נתון: $BC = 3b$, $AC = 6b$.

א. הוכיחו: הקטע CD הוא חוצה זווית במשולש $\triangle ABC$.

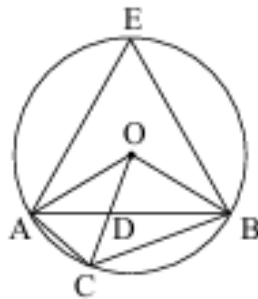
ב. נתון: $AB = AC$. קבעו איזה מההיקפים - של המשולש $\triangle ADE$

או של הטרפז BCED - הוא גדול יותר. נמקו.

תשובות: (1) ב. 1. 9 סמ"ר. 2. 8 סמ"ר. (2) א. $\frac{2}{3}$. ב. $S_{\triangle ADFE} = 40s$, $S_{\triangle DEF} = 16s$.

(3) ב. היקף המשולש $\triangle ADE$.

מעגל ללא פרופורציה ודמיון



1. הנקודות A, B, C ו-E נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O. הרדיוס CO

והמיתר AB נחתכים בנקודה D. נתון: $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABC = 20^\circ$.

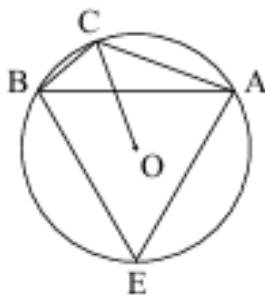
א. חשבו את גודל הזוויות $\angle AEB$ ו- $\angle BAO$.

ב. מהו מיקום הנקודה E שעבורו שטח המשולש $\triangle ABE$ הוא מקסימלי? הסבירו את תשובתכם.

ג. רון טען שהמשולש $\triangle ABE$ הוא בהכרח שווה צלעות.

האם הוא צודק? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון: $\angle EAO = 30^\circ$. הוכיחו: $AE = BE$.



2. (*) המשולש שווה הצלעות $\triangle ABE$ חסום במעגל שמרכזו בנקודה O.

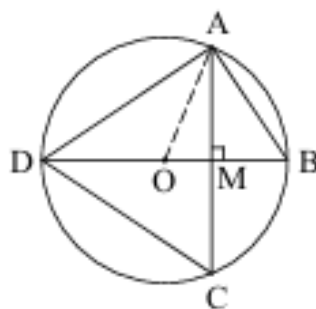
נסמן: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

א. חשבו את הסכום: $\alpha + \beta$.

ב. חשבו את היחס בין אורך הקשת AB הארוכה לאורך הקשת AB הקצרה.

ג. קבעו אם ייתכן משולש שזוויותיו: α , $\beta + \alpha$, $2\beta + \alpha$. נמקו.

ד. נתון מרובע ששלוש מזוויותיו הן: $\alpha + 3\beta$, $\beta + \alpha$ ו- 2α . חשבו את זוויתו הרביעית.



3. המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שמרכזו בנקודה O. הנקודה C נמצאת

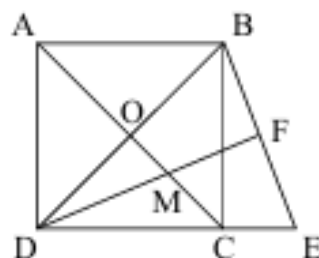
על המעגל. נתון: $\angle DAO = \angle CAO$, $AC \perp BD$.

א. חשבו את הזווית $\angle ABD$.

ב. הוכיחו: $AD = CD$.

ג. המיתרים AC ו-BD נחתכים בנקודה M. נסמן: $BM = a$.

הביעו באמצעות a את אורך הקטע DM.



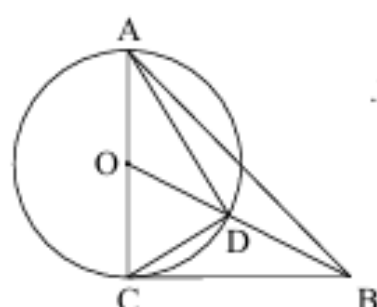
4. אלכסוני הריבוע ABCD נחתכים בנקודה O. הנקודה E נמצאת

על המשך הצלע CD. הקטע DF הוא התיכון לבסיס במשולש שווה

השוקיים $\triangle BDE$. הוכיחו שהנקודה M היא מרכז המעגל:

א. החוסם את המשולש $\triangle BDE$.

ב. החסום במשולש $\triangle ABCD$.



5. נתון המשולש ישר הזוויות ושווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AC \perp BC$).

הנקודה O היא מרכז מעגל שקוטרו AC. המעגל חותך את BO בנקודה D.

א. הוכיחו: הקשת הקצרה AD חוצה את חיתר AB.

ב. נסמן: $\angle CAD = \alpha$. הביעו באמצעות α את הזוויות:

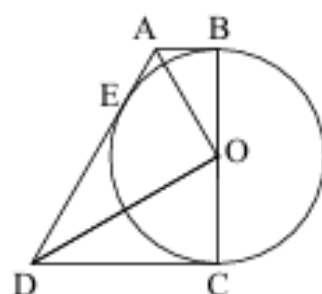
1. $\angle BAD$ 2. $\angle ABD$

ג. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו:

i. ייתכן שמתקיים: $\angle BAD = \angle CBO$.

ii. ייתכן שמתקיים: $\angle CDO = \angle BAD$.

iii. לא ניתן להרכיב משולש שזוויותיו הן: $\angle ADB$, $\angle ABD$ ו- $\angle BDC$.



6. (*) הקטעים AB, AD ו-CD משיקים למעגל שמרכזו O.

בנקודות B, E ו-C בהתאמה. הקטע BC הוא קוטר במעגל.

א. הוכיחו: $\angle AOD = 90^\circ$.

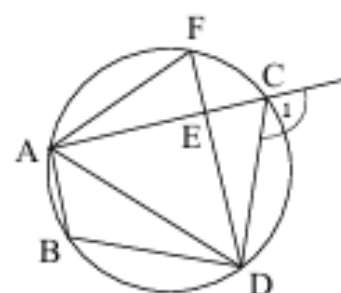
ב. עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו את תשובתכם.

i. $\triangle ADO \cong \triangle ODC$ ii. $\triangle ABO \sim \triangle AOD$

ג. נתון: $AB = m$, $\angle AOB = 30^\circ$.

עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו.

i. $CD = 3m$ ii. $AD = 3.5m$ iii. $OE = \sqrt{3}m$



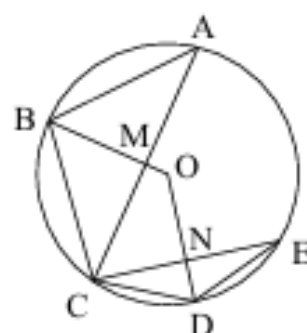
7. הנקודות A, B, C, D ו-F נמצאות על מעגל.

המיתרים AC ו-DF נחתכים בנקודה E.

א. הוכיחו: $\angle ABD = \angle C_1$.

ב. נתון: $\angle AED = 90^\circ$, $AD = AC$, $AE = ED$.

חשבו את הזוויות $\angle CAF$ ו- $\angle ABD$.



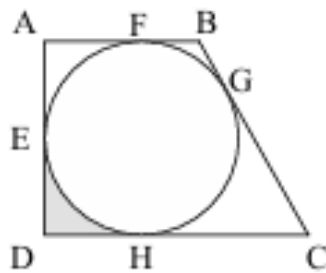
8. במעגל שמרכזו בנקודה O, הרדיוס BO חותך את המיתר AC בנקודה M.

הרדיוס DO חותך את המיתר CE בנקודה N.

נתון: $AB = BC$, $\angle DCE = \angle CED$.

א. הוכיחו: ניתן לחסום במעגל את המרובע CMON.

ב. (*) נתון: הזווית $\angle MON$ קהה. הוכיחו: $MN < CO$.



9. הטרפז ABCD ישר הזווית ($\angle BAD = 90^\circ$) חוסם מעגל.

המעגל משיק לצלעות הטרפז בנקודות E, F, G ו-H.

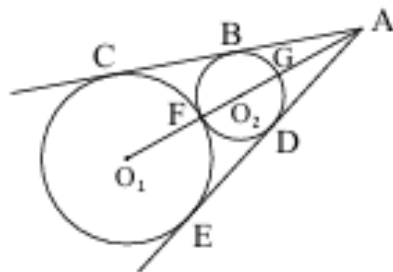
נתון: $BC = 10$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ. חשבו את:

א. היקף הטרפז ABCD.

ב. שטח הטרפז ABCD.

ג. סכום השטחים הכלואים בין הטרפז ABCD לבין המעגל.

ד. ההיקף והשטח של הצורה הצבועה באפור בשרטוט.



10. שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 משיקים זה לזה בנקודה F.

רדיוס המעגל שמרכזו O_1 ארוך פי שניים מרדיוס המעגל

שמרכזו O_2 . מהנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגלים

בנקודות D, C ו-E, B כמתואר בשרטוט. הישר העובר דרך מרכזי

המעגלים חותך את המעגל שמרכזו O_2 בנקודה G.

א. הוכיחו: הקטע AG שווה באורכו לרדיוס המעגל שמרכזו O_1 .

ב. נתון: היקף הדלתון ACO_1E הוא 40 ס"מ.

חשבו את היקף הדלתון ABO_2D .

תשובות:

1 א. $\angle AEB = 60^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$. ב. כאשר הנקודה E נמצאת

באמצע הקשת AB הארוכה. ג. רון טועה. במשולש $\triangle ABE$ ידוע

ש: $\angle AEB = 60^\circ$ אך אין מידע נוסף לגבי זוויות וצלעות במשולש.

2 א. 60° . ב. 1:2. ג. לא. ד. 120° . 3 א. 60° . ג. $3a$.

5 א. 1. $45^\circ - \alpha$. 2. $2\alpha - 45^\circ$. ג. i. שגויה. ii. שגויה. iii. נכונה.

6 א. i. שגויה. ii. נכונה. ג. i. נכונה. ii. שגויה. iii. נכונה.

7 א. $\angle CAF = 22.5^\circ$, $\angle ABD = 112.5^\circ$.

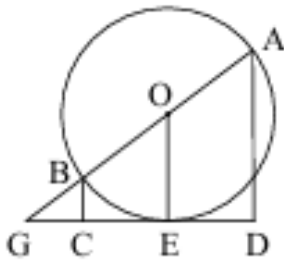
9 א. 36 ס"מ. ב. 72 סמ"ר. ג. 21.73 סמ"ר.

ד. השטח 3.43 סמ"ר $= 16 - 4\pi$. ההיקף 14.28 ס"מ $= 8 + 2\pi$.

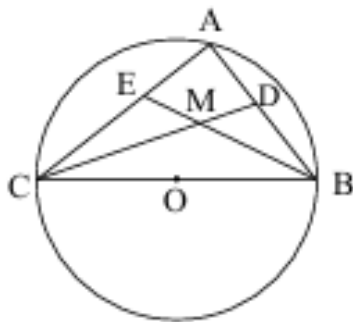
10 א. 20 ס"מ.



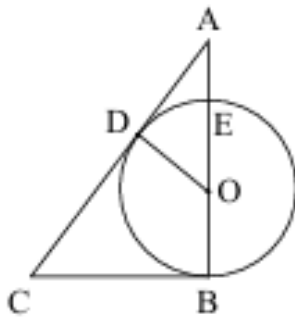
מעגל עם פרופורציה ודמיון



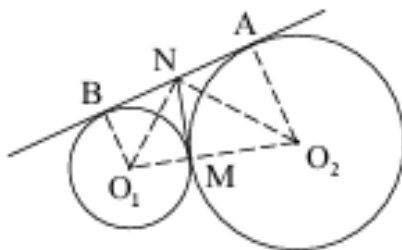
1. הקטע GD משיק למעגל שמרכזו O בנקודה E. AB הוא קוטר.
הנקודות C ו-D נמצאות על DG כך שמתקבל הטרפז ישר
הזווית ABCD ($AD \parallel BC$).
א. הוכיחו: OE קטע אמצעים בטרפז.
ב. נתון: $AD = 24$ ס"מ, $GD = 32$ ס"מ. חשבו את שטח העיגול.
ג. חשבו את שטח המשולש ABCG.



2. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל שמרכזו O. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על המיתרים AB ו-AC. הקטע BC הוא קוטר. הקטעים BE ו-CD נחתכים בנקודה M שהיא מרכז המעגל **החסום** במשולש $\triangle ABC$. נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 10$ ס"מ. חשבו את:
- א. אורך הקטע AE.
ב. שטח המשולש $\triangle ADE$.



3. נתון המשולש ישר הזוויות $\triangle ABC$. מעגל שרדיוסו R ומרכזו O בנקודה O הנמצאת על הניצב AB, עובר דרך הקודקוד B ומשיק ליתר AC בנקודה D. נתון: $AE = 2$ ס"מ, $AD = 4$ ס"מ, $BC = 6$ ס"מ.
- הוכיחו: $\triangle ADO \sim \triangle ABC$.
 - חשבו את שטח העיגול.
 - הוכיחו: המרובע BCDO בר חסימה.
 - הוסיפו לשרטוט את המעגל החוסם את המרובע BCDO. חשבו את שטחו.

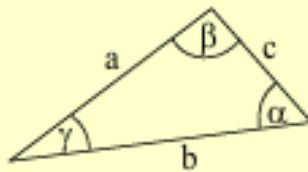


4. מעגל שמרכזו בנקודה O_1 ושטחו 81π סמ"ר משיק בנקודה M למעגל שמרכזו בנקודה O_2 והיקפו 32π ס"מ. הקטעים AB ו-MN משיקים למעגלים בנקודות A, B ו-M, N כמתואר בשרטוט.
- א. הוכיחו: 1. $\angle O_1NO_2 = 90^\circ$ 2. $\Delta ANO_2 \sim \Delta BO_1N$
- ב. חשבו את אורך הקטע AB.

תשובות:



- (1) ב. 706.86 סמ"ר = 225π . ג. 24 סמ"ר. (2) א. 3 ס"מ. ב. 4 סמ"ר.
(3) ב. 9π . ג. 28.27 סמ"ר. ד. 11.25π . 35.34 סמ"ר. (4) ב. 24 ס"מ.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

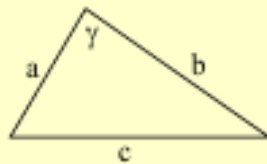
משפט הסינוסים מתקיים בכל משולש:

ניתן להשתמש במשפט הסינוסים כאשר:

- ידועים אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן (ז.צ.צ) ונרצה לחשב את הזווית שמול הצלע השנייה.
- ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן (צ.ז.ז) ונרצה לחשב את אורך הצלע השנייה.

שימו לב! כאשר יש בידינו את ערכו של סינוס הזווית ואנו מעוניינים למצוא בעזרתו את הזווית עצמה, עלינו לזכור כי לאור הזהות: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, למעשה **שתי זוויות שונות** מתאימות לאותו ערך של סינוס. לדוגמה, עבור $\sin \alpha = 0.5$ נקבל במחשבון ש: $\alpha = 30^\circ$ אך למעשה גם $\alpha = 150^\circ$. בהתאם לנתוני השאלה, נבחר בזווית החדה או הקהה.

בעזרת משפט הסינוסים ניתן להוכיח **נוסחה נוספת לחישוב שטח המשולש**: $S = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$.

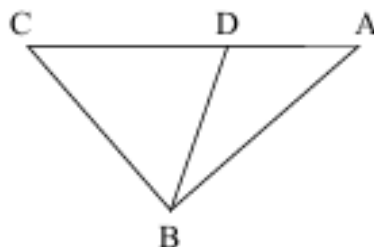


משפט הקוסינוסים מתקיים בכל משולש וניתן להציגו בשתי דרכים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{או לאחר בידוד } \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שלוש הצלעות (צ.צ.צ) וברצוננו למצוא את זווית המשולש.

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן (צ.ז.צ) וברצוננו למצוא את הצלע השלישית.



1. הנקודה D נמצאת על הצלע AC במשולש $\triangle ABC$.

שטחו של המשולש $\triangle ABC$ הוא 8 סמ"ר.

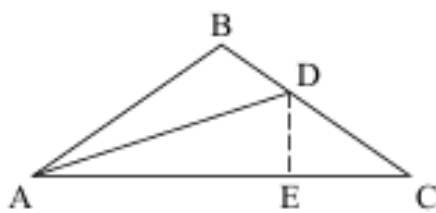
נתון: $\angle BAC = 41^\circ$, $BD = 4$ סמ"מ, $CD = 5$ סמ"מ. חשבו את:

א. גודל הזווית $\angle BDC$.

ב. אורך הצלע AB.

ג. שטח המשולש $\triangle ABD$.

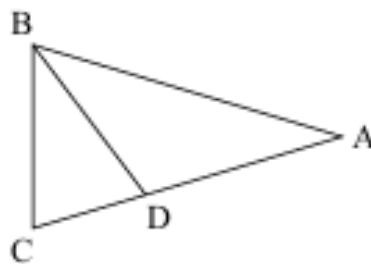
ד. שטח המשולש $\triangle ABC$.



2. הקטע AD הוא חוצה זווית במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים ($AB = BC$) ששטחו 45 סמ"ר. במשולש $\triangle ACD$ הקטע DE הוא

גובה. נתון: $\angle ABC = 110^\circ$. חשבו את:

- שטח המשולש $\triangle ADE$.
- היקף המשולש $\triangle ADE$.
- היקף המשולש $\triangle ABD$.

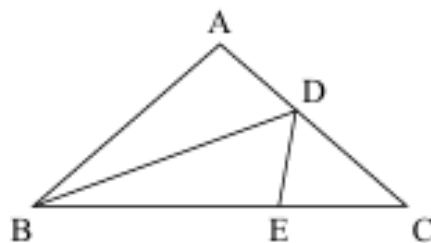


3. במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$), הקטע BD חוצה את

הזווית $\angle ABC$. נסמן: $\angle DBC = \beta$, $AC = a$.

הביעו באמצעות β ו-a את:

- אורך הצלע BC.
- אורך הצלע CD.
- שטח המשולש $\triangle ABD$.



4. הקטע BD הוא חוצה זווית במשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$.

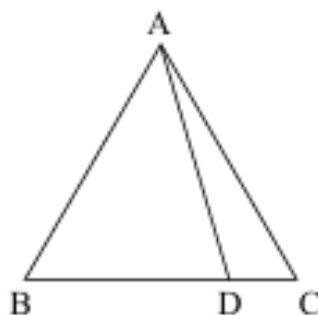
הנקודה E נמצאת על הבסיס BC. הקטע DE הוא חוצה זווית

במשולש $\triangle ABC$. נסמן: $CD = p$, $\angle ACB = 4\alpha$.

א. הביעו באמצעות α את הזווית $\angle CDE$.

ב. הביעו באמצעות p ו- α את:

- אורך הקטע DE.
- אורך הקטע BD.
- שטח המשולש $\triangle BDE$.

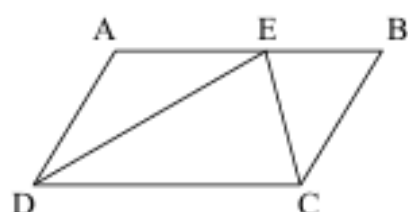


5. המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה צלעות והיקפו 24 ס"מ.

הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $BD = 3CD$.

הזווית $\angle ADC$ קהה.

- חשבו את אורך הקטע BD.
- חשבו את אורך הקטע AD.
- מצאו את גודל הזווית $\angle ADB$.



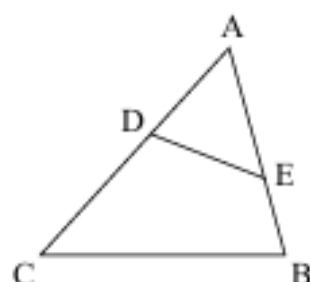
6. הנקודה E נמצאת על הצלע AB במקבילית ABCD.

נתון: $AE = 7$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ, $BE = 3$ ס"מ, $DE = 2CE$.

א. חשבו את אורכי הקטעים CE ו-DE.

ב. חשבו את הזווית $\angle CED$.

ג. חשבו את שטח המשולש $\triangle CDE$.



7. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו-AB במשולש $\triangle ABC$.

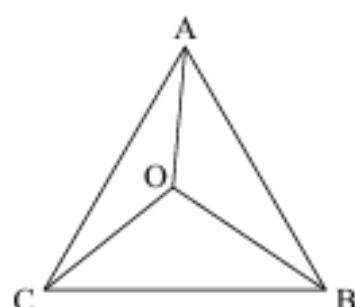
נתון: $DE = 3$ ס"מ, $AE = 4$ ס"מ. נסמן: $\angle AED = \alpha$.

א. הראו שמתקיים: $AD = \sqrt{25 - 24 \cdot \cos \alpha}$.

ב. נתון: שטח המשולש $\triangle ADE$ הוא חמישה סמ"ר.

מצאו את α וחשבו את הזווית החדה $\angle BAC$.

ג. נתון: $BE = 2$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ. חשבו את שטח המרובע BCDE.



8. (י) הנקודה O נמצאת בתוך המשולש שווה הצלעות $\triangle ABC$ שהיקפו 6b. נתון: $\angle BAO = 35^\circ$.

א. אילו אורכים של קטעים ניתן להביע באמצעות b בעזרת הנתונים?

אין צורך להביע אותם.

ב. נתון: $AO = b$.

1. חשבו את גודל הזווית $\angle ABO$.

2. הביעו באמצעות b את אורך הקטע CO.

ג. איזה נתון מהנתונים הבאים אינו יכול לסייע לנו למצוא את b?

i. $S_{\triangle ABO} = 20$ סמ"ר ii. $BO = 20$ ס"מ

iii. היחס בין אורך BO לבין אורך CO. iv. הצלע BC ארוכה ב-5 ס"מ מהקטע CO.

ד. נתון: היקף המשולש $\triangle AOC$ הוא 29 ס"מ. חשבו את שטחו.

תשובות: 1) א. 53.13° ב. 4.88 ס"מ ג. 2.05 סמ"ר ד. 10.05 סמ"ר 2) א. 19.22 סמ"ר ב. 26.11 ס"מ.

ג. 25.06 ס"מ. 3) א. $\frac{a \sin 4\beta}{\sin 2\beta}$ ב. $\frac{a \sin \beta \cdot \sin 4\beta}{\sin 2\beta \cdot \sin 3\beta}$ ג. $\frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin 4\beta}{2 \sin 3\beta}$ 4) א. $90^\circ - 3\alpha$.

ב. 1. $\frac{p \cdot \sin 4\alpha}{\cos \alpha}$ 2. $\frac{p \cdot \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}$ 3. $\frac{p^2 \cdot \sin^2 4\alpha \cdot \cos 3\alpha}{2 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}$ 5) א. 6 ס"מ ב. 7.21 ס"מ ג. 73.93° .

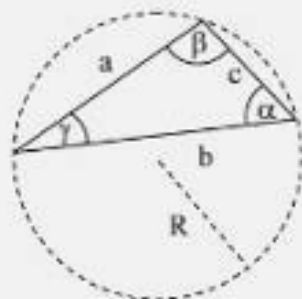
6) א. $CE = 4.41$ ס"מ, $DE = 8.82$ ס"מ ב. 91.97° ג. 19.45 סמ"ר.

7) ב. $\angle BAC = 46.85^\circ$, $\alpha = 56.44^\circ$ ג. 13.45 סמ"ר.

8) א. ניתן להביע את אורכי הצלעות AB, BC ו-AC. ב. $1.17b$ ג. iii. ד. 20.42 סמ"ר.

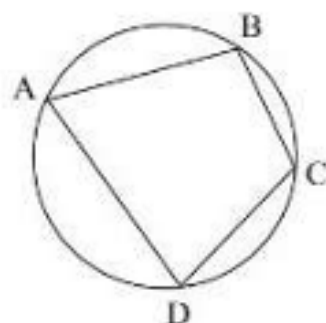
טריגונומטריה במעגל

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

לפי משפט זה, היחסים בין הצלעות לבין סינוסי הזוויות שמולן שווים זה לזה ולקוטר המעגל **החוסם** את המשולש ($2R$).
בכל שימוש במשפט יש לציין את המשולש בו אנו מבצעים חישובים.



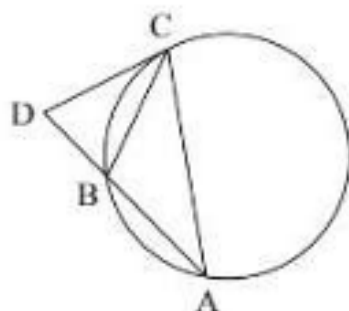
1. המרובע ABCD חסום במעגל.

נתון: $AB = 6$ ס"מ, $BC = 4$ ס"מ, $AD = 7$ ס"מ, $CD = 5$ ס"מ.
חשבו את:

א. גודל הזווית $\angle BAD$.

ב. אורך רדיוס המעגל.

ג. שטח המרובע ABCD.



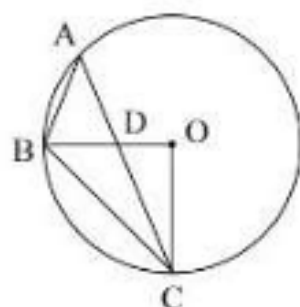
2. המשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים ($AB = BC$) חסום במעגל שרדיוסו R .

הקטע CD משיק למעגל בנקודה C . נתון: $\angle BAC = \beta$.

הביעו באמצעות R ו- β את שטחי המשולשים:

1. $\triangle ABC$

2. $\triangle ACD$



3. הנקודות A, B, C נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R .

הרדיוסים BO ו- CO מאונכים זה לזה. נתון: $AC = 3AB$.

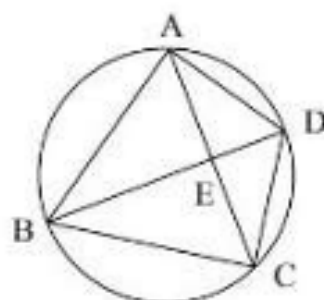
המיתר AC והרדיוס BO נחתכים בנקודה D .

א. הביעו באמצעות R את אורכי המיתרים AB ו- AC .

ב. חשבו את הזווית $\angle ACB$.

ג. נתון: $BD = 6$ ס"מ. חשבו את היקף המעגל.

טריגונומטריה במעגל



4. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על היקפו של מעגל שרדיוסו R. אלכסוני המרובע ABCD נחתכים בנקודה E. נתון: $AB = AC$, BD חוצה את הזווית $\angle ABC$. נסמן: $\angle ACD = \alpha$.
 א. נתון: שטח המשולש $\triangle ABE$ גדול פי 3 משטח המשולש $\triangle CDE$. מצאו את α .
 ב. קבעו אם ניתן לחסום מעגל במרובע ABCD. נמקו.

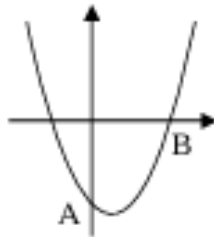
תשובות:

- (1) א. 69.22° . ב. 3.97 ס"מ. ג. 28.98 סמ"ר.
 (2) 1. $2R^2 \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin 2\beta$. 2. $\frac{2R^2 \cdot \sin^3 2\beta \cdot \sin \beta}{\sin 3\beta}$.
 (3) א. $AB = 0.59R$, $AC = 1.77R$. ב. 17.13° . ג. 79.9 ס"מ.
 (4) א. 30° . ב. ניתן לחסום

פונקציית פולינום

דוגמה: נגזרת הפולינום: $f(x) = x^6 - 3x^4 + x^2 - 3x + 6$ היא: $f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 2x - 3$.

ערך הנגזרת בנקודה שבה $x=1$ הוא: $f'(1) = 6 \cdot 1^5 - 12 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 3 = -7$.



1. גרף הפרבולה: $f(x) = x^2 - 2x - 8$ חותך את הצירים בנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט.

א. מצאו את משוואת הישר עליו מונח הקטע AB.

ב. דרך נקודה הנמצאת על גרף הפונקציה ברביעי הרביעי העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר AB. מצאו את משוואת המשיק.

ג. המשיק שמצאתם בסעיף ב' חותך את ציר ה-x בנקודה C ואת ציר ה-y בנקודה D. חשבו את שטח המרובע ABCD.

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 - 12x^3 + 36x^2$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בסקיצה של הפונקציה ועבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או שגויה:

i. הישר $y = 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בארבע נקודות.

ii. הישר $y = 81$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות.

3. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 1$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y.

2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

3. תחומי העלייה והירידה.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו עבור אילו ערכי k יהיו למשוואה: $f(x) = k$ שלושה פתרונות. נמקו.

ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x) = 4 \cdot f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$:

1. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון שלה וקבעו את סוגן. נמקו את תשובתכם.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3m^2x$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ הביעו באמצעות הפרמטר החיובי m , במידת הצורך, את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
 3. תחומי העלייה והירידה.
 4. תחומי החיוביות והשליליות.
- ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ג. לפניכם טענה:

"ככל ש- m קרוב יותר ל-0, כך נקודות הקיצון של הפונקציה יהיו קרובות יותר זו לזו".

קבעו אם הטענה נכונה או שגויה. נמקו את תשובתכם.

ד. קבעו אם הפונקציה זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית. נמקו את תשובתכם.

תשובות:

1. א. $y = 2x - 8$. ב. $y = 2x - 12$. ג. 20 יח"ר.

2. א. 1. $(0,0)$, $(6,0)$. 2. $\min(0,0)$, $\max(3,81)$, $\min(6,0)$.

3. עולה: $6 < x$ או $0 < x < 3$; יורדת: $3 < x < 6$ או $x < 0$.

ב. השרטוט משמאל. ג. 1. נכונה. ii. שגויה.

3. א. 1. $(0,1)$. 2. $\min(0.5, -3.75)$, $\max(-3, 82)$.

3. עולה: $0.5 < x$ או $x < -3$; יורדת: $-3 < x < 0.5$.

ב. השרטוט הימני. ג. $-3.75 < k < 82$.

ד. 1. השרטוט השמאלי.

2. $\min(0.5, -15)$, $\max(-3, 328)$.

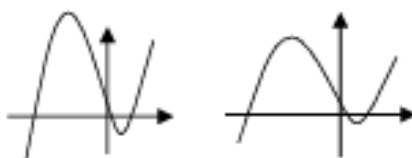
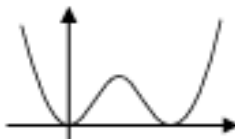
4. א. 1. $(-\sqrt{3}m, 0)$, $(\sqrt{3}m, 0)$, $(0,0)$. 2. $\max(-m, 2m^3)$, $\min(m, -2m^3)$.

3. עולה: $m < x$ או $x < -m$; יורדת: $-m < x < m$.

4. חיוביות: $\sqrt{3}m < x$ או $-\sqrt{3}m < x < 0$;

שליליות: $0 < x < \sqrt{3}m$ או $x < -\sqrt{3}m$.

ב. השרטוט משמאל. ג. נכונה. ד. אי זוגית.

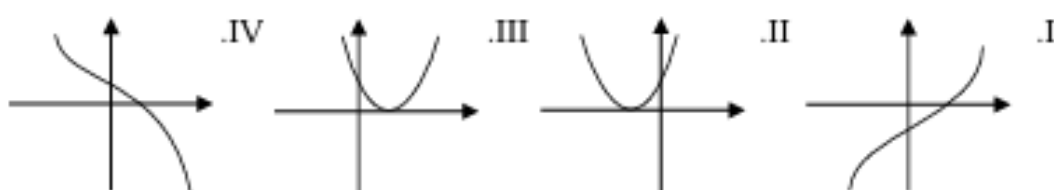


פונקציה מורכבת

בפרק זה נתייחס לביטוי "פונקציה מורכבת" כמייצג פונקציה המתקבלת כאשר נעלה פונקציית פולינום בשלמותה בחזקה טבעית כלשהי. לדוגמה: $f(x) = (x^3 - 2x)^5$, $g(x) = (x^2 + x + 1)^5$.

1. נתונה הפונקציה $f(x) = (8 - 2x)^4$.

א. מצאו איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הפונקציה $f(x)$:



ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו באותה מערכת צירים סקיצות לגרפים של הפונקציות:

$$f(x), g(x) = -(8 - 2x)^4, h(x) = 16 - (8 - 2x)^4$$

ג. מבלי לפתור משוואה כלשהי, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $h(x) = 0$. הסבירו.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $h(x)$ עם ציר ה- x .

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 \cdot (2 - x)^3 + 3x^2$.

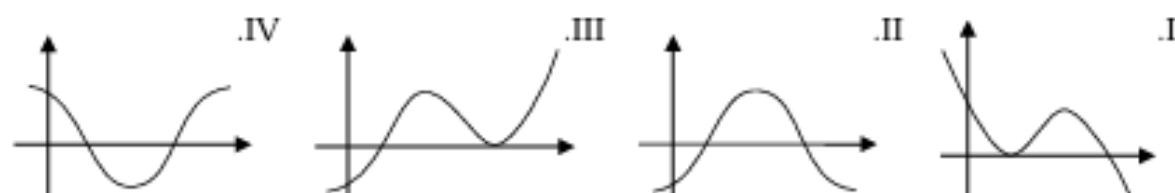
א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y .

2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. קבעו איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.



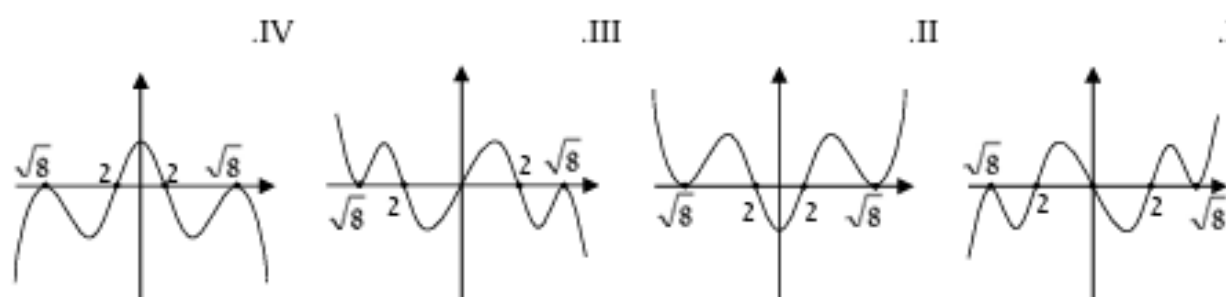
ד. (*) לפניכם המשוואה: $f(x) = f^3(x)$.

1. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה זו. הסבירו.

2. האם ניתן לקבוע אם למשוואה יש פתרונות חיוביים או שליליים? הסבירו.

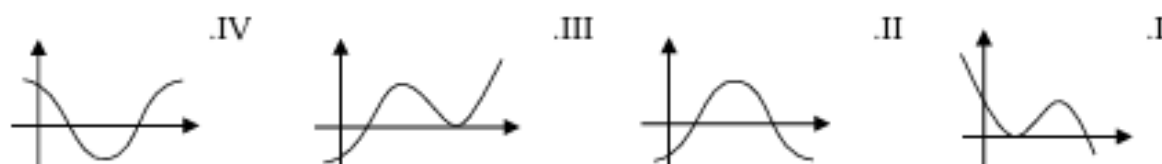
3. נתונה הפונקציה: $f(x) = (-x^4 + 8x^2)^3$.

- א. 1. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.
3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
4. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. בשרטוט התייחסו לנקודות פיתול, אם יש כאלה.
5. קבעו אם הפונקציה זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית. נמקו את תשובתכם.
- ב. מבין הגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$: נמקו.

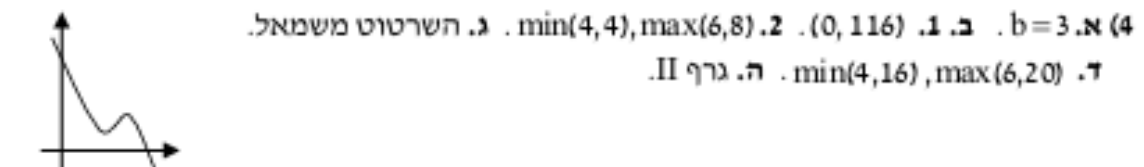
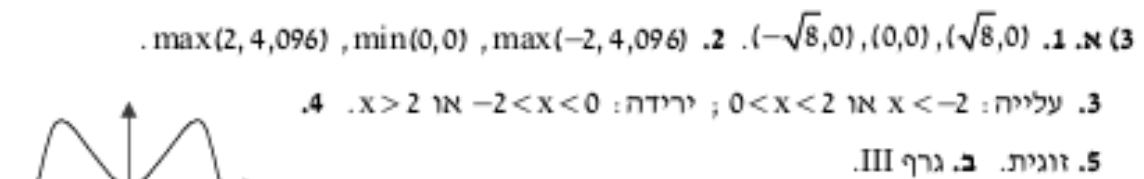
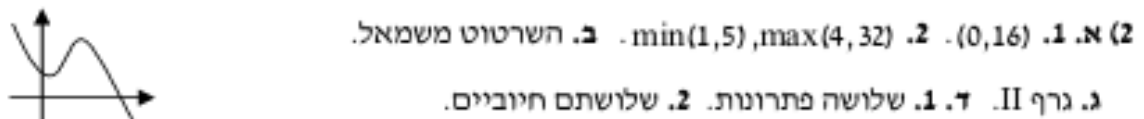
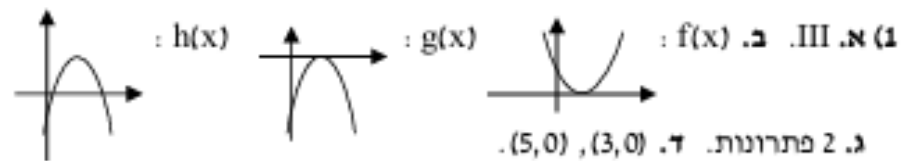


4. (*) אחת מנקודות הקיצון של גרף הפונקציה: $f(x) = bx - 9 + (5 - x)^3$ נמצאת על הישר $x = 4$.

- א. מצאו את b .
- ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:
 1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
 - ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
 - ד. הפונקציה הקווית $g(x) = 2x + 8$ מוגדרת בתחום: $x_1 \leq x \leq x_2$. הישר המחבר בין נקודות המינימום של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקביל לציר ה- y . הישר המחבר בין נקודות המקסימום של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מאונך לציר ה- x . מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.
 - ה. קבעו איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.



תשובות:



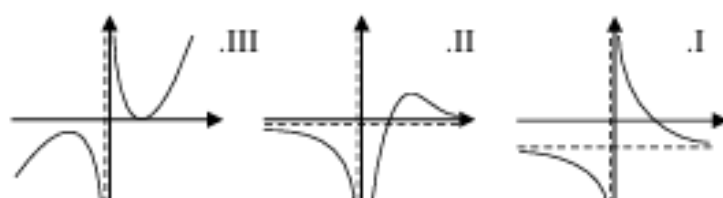
פונקציית מנה

1. לפניהם שלוש פונקציות: $f(x) = \frac{3-x}{x}$, $g(x) = \frac{x-3}{x^2}$, $h(x) = \frac{(3-x)^2}{x}$.

לפניהם שלושה גרפים.

התאימו כל גרף לפונקציה המתאימה.

הסבירו את תשובתכם.



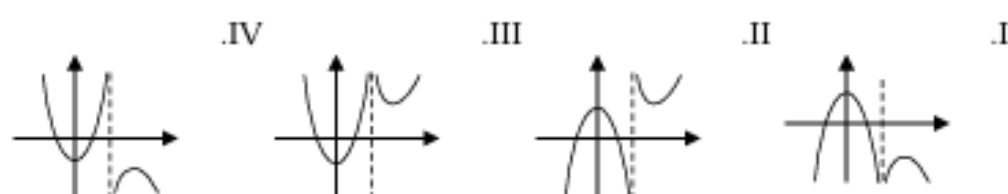
2. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 3}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. תחומי החיוביות והשליליות. 4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. לפניהם ארבעה גרפים. קבעו איזה מהגרפים הוא גרף הפונקציה $f(x)$:



ג. נתון ששיעורי ה- x של נקודות הקיצון הם: $x_1 = 0$ ו- $x_2 = 6$. מצאו את שיעורי ה- y שלהן.

ד. מצאו עבור אילו ערכי k למשוואה $\frac{x^2 + 4x - 12}{x - 3} = k$:

1. יהיו שני פתרונות. 2. יהיה פתרון אחד. 3. לא יהיו פתרונות.

$$3. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{3x^3 + 12 - x^2}{x^3} - 3$$

א. קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית. נמקו.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן. 4. תחומי העלייה והירידה.

5. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו לאילו ערכי k יהיו לישר $y = k$ שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה החדשה: $g(x) = -f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$:

1. שרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

2. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

$$4. \text{ נקודת הקיצון של גרף הפונקציה: } f(x) = \frac{ax^2 - 4a}{x^2 - 1} \text{ נמצאת על הישר } y = 4.$$

א. מצאו את a .

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה. 2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה. 4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ נחתכות בנקודות A ו-B. חשבו את שטח הטרפז שקודקודיו

הן הנקודות A ו-B ונקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

5. שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = 2 + \frac{2x^2 - x - 62}{b - x^2}$ נחתכות בנקודה $(6, 0)$.

א. מצאו את b .

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.

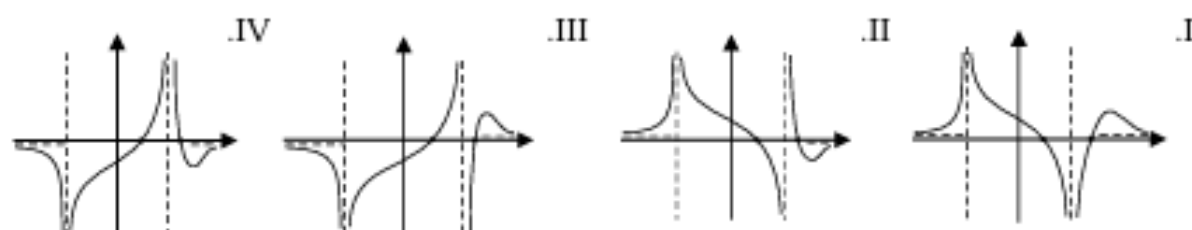
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבעו איזה מארבעת הגרפים הנתונים עשוי להיות גרף של הנגזרת $f'(x)$. נמקו.



6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x - 2a}{x^2}$, $0 < a$.

בסעיפים הבאים ניתן, במידת הצורך, להיעזר בתשובות בפרמטר a .

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.

2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.

3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. לפניכם טענה: "ככל ש- a גדול יותר, נקודת הקיצון של הפונקציה קרובה יותר לציר ה- x ".

קבעו אם הטענה נכונה או שגויה. הסבירו את תשובתכם.

ד. (*) קבעו כמה פתרונות יש למשוואה: $f^2(x) = -f(x)$.

הסבירו את תשובתכם.

$$7. (*) \text{ נתונה הפונקציה הזוגית: } f(x) = \frac{81 + px - x^2}{x^2 + 9}$$

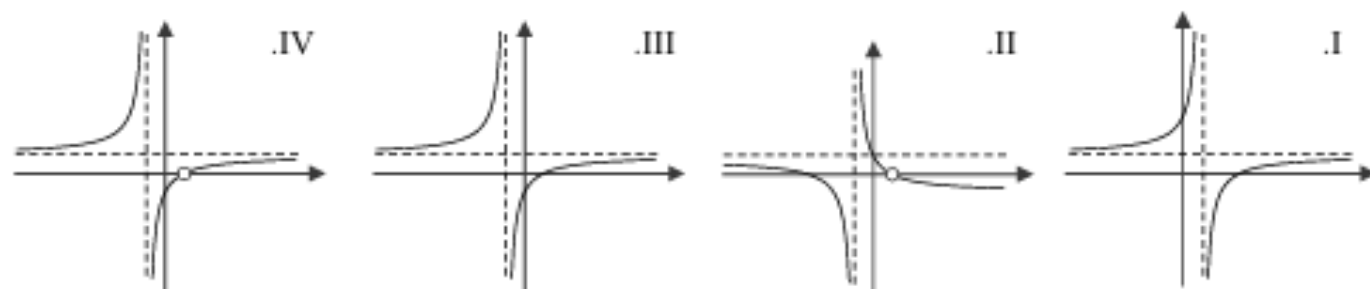
א. מצאו את p .

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים, אם יש כאלה.
- ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. מעגל שמרכזו בראשית הצירים עובר בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הכיוון החיובי של ציר ה- x . עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או שגויה:
 - i. מעגל זה עובר גם בנקודות החיתוך האחרות של גרף $f(x)$ עם הצירים.
 - ii. היקפו של המעגל הוא 81π יח' אורך.

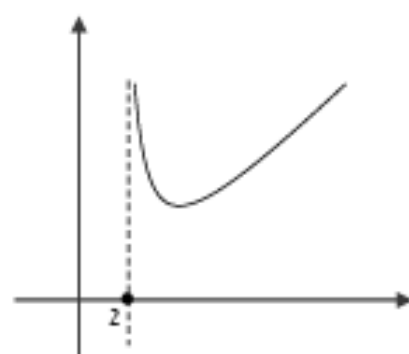
$$8. \text{ א. נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-1}. \text{ עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו:}$$

- i. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x \neq -1$ ו- $x \neq 1$.
- ii. לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת אי רציפות סליקה ("חור") עבור $x = -1$.
- iii. לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.
- iv. הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום: $x > -1$.
- v. הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום: $x < -1$.
- vi. הישר $x = 1$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $f(x)$.
- vii. הישר $y = 1$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. קבעו איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $f(x)$:



- ג. מצאו עבור אילו ערכי p , הישר $y = p$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.
- ד. מצאו עבור אילו ערכי t , הישר $x = t$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

9. (*) לפניכם החלק של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - b^2}$ הנמצא מימין לאסימפטוטה $x = 2$.



בסעיפים הבאים התייחסו גם לתחום: $x < 2$.

א. מצאו את b , בהינתן שהוא חיובי.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו שיעורי נקודת אי רציפות סליקה (חור) של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $x < 2$.

ז. דרך נקודת אי הרציפות הסליקה של הפונקציה $f(x)$ עוברים שני ישרים: האחד מקביל לציר

ה- x והשני מקביל לציר ה- y . חשבו את השטח הכלוא בין שני ישרים אלו לבין הצירים.

תשובות:

1. $f(x)$ מתאימה לגרף הימני: הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(3,0)$ וחיובית בינה לבין ציר ה- y .

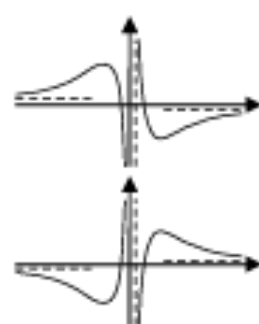
$g(x)$ מתאימה לגרף האמצעי: הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(3,0)$ ושלילית בינה לבין ציר ה- y .

$h(x)$ מתאימה לגרף השמאלי: הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה $(3,0)$ ואי-שלילית בתחום $0 \leq x$.

2. א. 1. $x \neq 3$. 2. $(2,0)$, $(-6,0)$, $(0,4)$. 3. חיוביות: $3 < x < 2$, $-6 < x < 2$; שליליות: $2 < x < 3$.

ג. $y_1 = 4$, $y_2 = 16$. ד. 1. $k < 4$, $16 < k$. 2. $k = 4$, $k = 16$.

3. $4 < k < 16$.



3. א. אי זוגית. ב. 1. $x \neq 0$. 2. $(-3.46, 0)$, $(3.46, 0)$. 3. $\max\left(-6, \frac{1}{9}\right)$, $\min\left(6, -\frac{1}{9}\right)$.

4. עולה: $6 < x$ או $x < -6$; יורדת: $0 < x < 6$ או $-6 < x < 0$.

5. $x = 0$, $y = 0$. ג. השרטוט העליון. ד. $k = 0, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}$. ה. 1. השרטוט התחתון.

2. חיוביות: $3.46 < x$ או $-3.46 < x < 0$; שליליות: $0 < x < 3.46$ או $x < -3.46$.

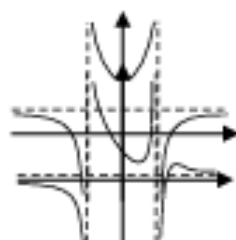
4. א. 1. $a = 1$. ב. 1. תחום ההגדרה: $x \neq \pm 1$. 2. $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$. 3. $\min(0, 4)$.

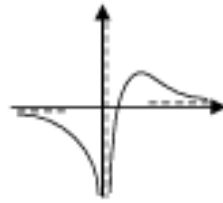
4. $x = -1, x = 1, y = 1$. ג. השרטוט משמאל. ד. 3 יח"ר.

5. א. 1. $b = 36$. ב. 1. תחום ההגדרה: $x \neq \pm 6$. 2. $(0, 0.28)$, $(10, 0)$.

3. $\min(2, 0.25)$, $\max(18, 0.02)$. 4. $x = -6, x = 6, y = 0$.

ג. השרטוט משמאל. ד. גרף IV.





6) א. 1. $x \neq 0$. 2. $(2a, 0)$. 3. $\max(4a, \frac{1}{8a})$.

4. $y=0, x=0$. ב. השרטוט משמאל.

ג. נכונה . ד. שלושה פתרונות.

7) א. $p=0$. ב. 1. כל א. 2. $(9,0), (0,9), (-9,0)$. 3. $\max(0,9)$.

4. $y=-1$. ג. השרטוט משמאל. ד. 1. נכונה . ii. שגויה.

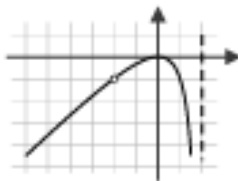
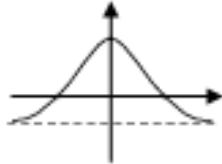
8) א. i. נכונה . ii. שגויה . iii. נכונה . iv. שגויה . v. נכונה . vi. שגויה . vii. נכונה.

ב. גרף IV. ג. $p=0,1$. ד. $t=1,-1$.

9) א. 1. $b=2$. 2. $x \neq -2, x \neq 2$. 3. $(-2,-1)$. ב. 1. $\min(4,8), \max(0,0)$.

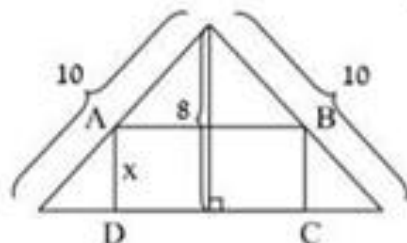
2. עלייה: $x > 4$ או $-2 < x < 0$ או $x < -2$; ירידה: $0 < x < 2$ או $2 < x < 4$.

ג. השרטוט משמאל. ד. 2 יחידות.



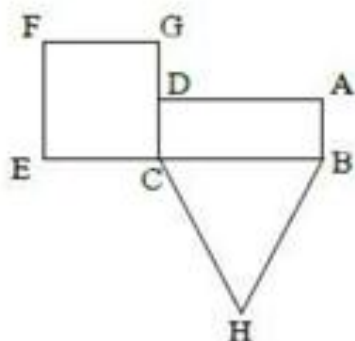
בעיות קיצון

1. המלבן ABCD חסום במשולש שווה שוקיים שאורך השוק שלו 10 ס"מ.

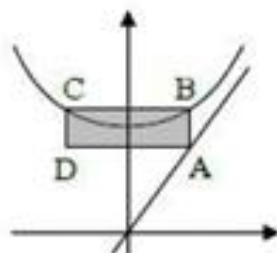


- א. היעזרו במשפט תאלס והביעו באמצעות x את שטח המלבן.
 ב. מצאו את ערכו של x עבורו שטח המלבן ABCD מקסימלי.
 ג. חשבו את השטח המקסימלי של המלבן ABCD.

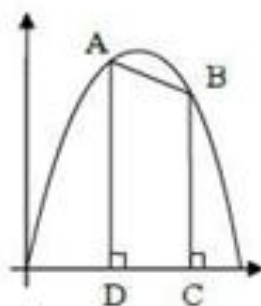
2. לפניכם שרטוט של צורה המורכבת מהריבוע CEFG, מהמלבן ABCD ומהמשולש שווה הצלעות ABCH. הנקודה D היא אמצע הצלע CG. שטח המלבן ABCD הוא 24 סמ"ר. נסמן: $GF = 2x$.
 א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BH.
 ב. מצאו את ערכו של x שעבורו היקף הצורה כולה הוא מינימלי.
 ג. כאשר היקף הצורה כולה הוא מינימלי, חשבו את שטח הריבוע CEFG.

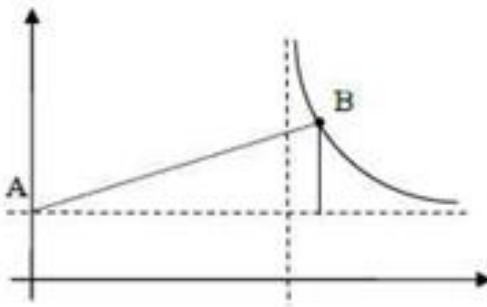


3. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 27x$ ברביע הראשון. הנקודות B ו-C נמצאות על הפרבולה $f(x) = x^2 + 216$ כך שמתקבל המלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A באמצעות t . מצאו את ערכו של t שעבורו שטח המלבן ABCD:
 א. מקסימלי.
 ב. מינימלי.



4. הנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפרבולה: $y = -x^2 + 10x$ ברביע הראשון. מהנקודות A ו-B הורידו אנכים לציר ה- x כך שהתקבל הטרפז ABCD כמתואר בשרטוט. נסמן: $x_A = t$ (שיעור ה- x של הנקודה A הוא t). נתון ששיעור ה- x של הנקודה B גדול פי-2 משיעור ה- x של הנקודה A.
 א. הראו ששיעורי הנקודה B הם: $(2t, -4t^2 + 20t)$.
 ב. מהם שיעורי הנקודה A שעבורה יהיה שטח הטרפז מקסימלי?
 ג. כאשר שטח הטרפז ABCD מקסימלי, חשבו את שיפוע הצלע AB.





5. נתונה סקיצה של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-9}$ ברביע הראשון.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ חותכת

את ציר ה-y בנקודה A.

א. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. מהנקודה B הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

ברביע הראשון הורידו אנך לאסימפטוטה האופקית

ומתחו קו ישר לנקודה A, כך שנוצר משולש ישר זווית.

מצאו את שיעורי הנקודה B שעבורה סכום אורכי הניצבים במשולש זה הוא מינימלי.

ג. עבור שיעורי הנקודה B שמצאתם בסעיף ב', מהו שיפוע היתר AB!

תשובות:

(1) א. $12x - 1.5x^2$. ב. $x = 4$. ג. 24 סמ"ר.

(2) א. $\frac{24}{x}$. ב. $x = 3$. ג. 36 סמ"ר.

(3) א. 6 . ב. 12.

(4) א. $A(4, 24)$. ג. -2.

(5) א. $x=9, y=1$. ב. $B(12, 4)$. ג. 0.25.



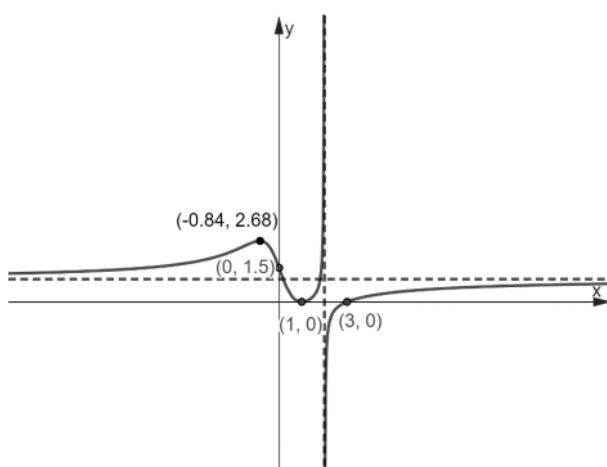
שאלות קצרות

אנליזה

שאלה 1

נתון הגרף הבא של הפונקציה $f(x)$:

- הישרים: $y = 1$ ו- $x = 2$ הם אסימפטוטות של הגרף.
- הנקודות $(0, 1.5)$, $(1, 0)$ ו- $(3, 0)$ נמצאות על הגרף.
- הנקודה $(1, 0)$ היא נקודת מינימום של הגרף.
- הנקודה $(-0.84, 2.68)$ היא נקודת מקסימום של הגרף.



ונתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

אילו מהטענות הבאות נכונות?
נמקו.

- (1) לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.
- (2) לפונקציה $g(x)$ אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x .
- (3) קיים תחום בו $f'(x) \cdot g'(x) > 0$ המכפלה $f'(x) \cdot g'(x) > 0$.

שאלה 2

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x-a)^2}{x^2+x-2}$.

א. עבור אילו ערכי a יהיו לפונקציה שתי אסימפטוטות אנכיות?

ב. הראו שכאשר $a = 3$ יש לפונקציה שתי נקודות קיצון שאחת מהן על ציר ה- x .

שאלה 3

א. לפניכם 2 טענות. קבעו בעבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא, נמקו.

(1) לכל פונקציה זוגית יש נקודת קיצון על ציר y .

(2) בכל פונקציה אי-זוגית הנקודה $(0,0)$ היא נקודת פיתול.

ב. בעבור כל אחת מהפונקציות הבאות רשמו את תחום ההגדרה (הרחב ביותר האפשרי) וקבעו האם היא זוגית או אי-זוגית.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$g(x) = x\sqrt{x^2 - 4} \quad (2)$$

$$h(x) = \frac{1}{|x|} \quad (3)$$

שאלה 4

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-b \leq x \leq b$,

ידוע כי הפונקציה זוגית,

יש לה נקודת מקסימום אחת ברביע הראשון ב- $x = a$, $0 < a < b$.

הנקודות $(b, 0)$ ו- $(0, 0)$ נמצאת על גרף הפונקציה.

א. סרטטו סקיצה אפשרית לגרף הפונקציה.

ב. בעבור $f(x)$ רציפה המקיימת את תנאי השאלה ובעבור פונקציה $g(x)$ המקיימת:

$$g'(x) = f(x) \quad \text{בתחום } -b < x < b :$$

(1) כמה נקודות קיצון יש ל- $g(x)$ בתחום $-b < x < b$?

(2) האם ייתכן כי לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות ב- $x = b$ ו- $x = -b$?

גיאומטריה

שאלה 1

המרובע $ABCD$ חסום במעגל.

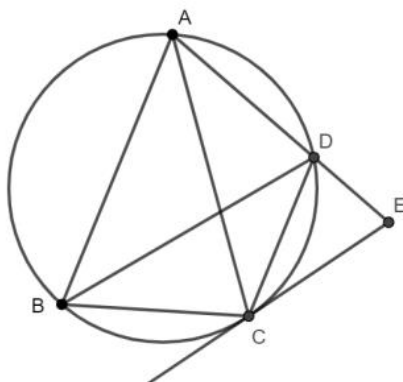
נתון: $AB = AC$.

בנקודה C מעבירים משיק למעגל. המשיק חותך את המשך AD בנקודה E .

הוכיחו:

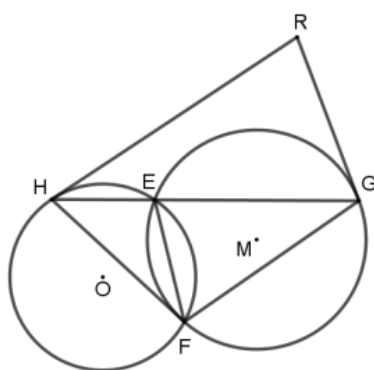
א. הקטע AC חוצה את הזווית $\angle ECB$.

ב. $\triangle DEC \sim \triangle CEA$.



שאלה 2

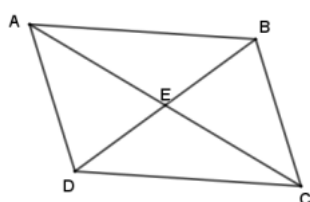
E ו- F הן נקודות חיתוך של המעגלים M ו- O .
הקטע GR משיק למעגל M והקטע HR משיק למעגל O .
הוכיחו שניתן לחסום את המרובע $RHFG$ במעגל.



שאלה 3

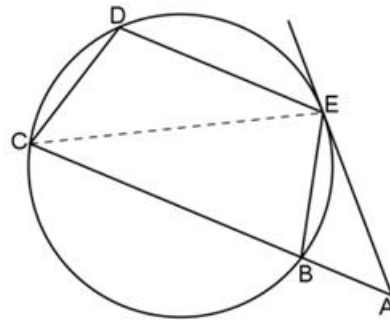
קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה והסבירו את שיקולכם:

טענה: אם אלכסוני מרובע קמור מחלקים אותו לארבעה משולשים שווים שטח, אז המרובע הוא מקבילית.



טריגונומטריה

שאלה 1



המרובע BCDE חסום במעגל שרדיוסו r .
 בנקודה E מעבירים משיק למעגל שחותך את המשיך
 הצלע BC בנקודה A.
 נתון: $\angle CDE = \alpha + \beta$, $\angle BEA = \alpha$, $DE \parallel AC$.
 בטאו באמצעות α, β, r את AC ואת EC .

פתרונות

אנליזה

1. טענה 2 נכונה
2. $a \neq 1$ וגם $a \neq -2$.
3. א. שתי הטענות אינן נכונות

1. $x \neq 0$ אי-זוגית.
2. $x \geq 2$ או $x \leq -2$ אי-זוגית.
3. $x \neq 0$ זוגית.

4. ב. 1. אין קיצון פנימיות
2. לא יתכן

גיאומטריה

3. הטענה נכונה

טריגונומטריה

$$\frac{2r \cdot \sin^2(\alpha + \beta)}{\sin(2\alpha + \beta)}$$

1.